Skript

Vektorrechnung

von

Georg Sahliger

Mainz, den 02.07.2024

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung 3
1. Definition des Vektors 3
2. Rechnen mit Vektoren 6
3. Punkte im dreidimensionalen Raum 9
4. Betrag eines Vektors - Abstand zweier Punkte 11
5. Das Skalarprodukt 13
Exkurs: Vektorrechnung mit dem GTR 16
6. Winkel zwischen zwei Vektoren 17
7. Das Kreuzprodukt 18
8. Geradendarstellung 21
8. Normalenform und Koordinatenform einer Geraden 24
8.1 Normalenform der Geraden 24
8.2 Umwandlung von Parameterform in Normalenform 25
8.3 Von der Normalenform in die Koordinatenform 26
8.4 Zusammenfassung 27
9. Geradendarstellung im Raum 28
9.1 Parameterform der Geraden im IR^3 28
9.2 Zeichnen einer Geraden im Raum 28
10. Gegenseitige Lage von Geraden 29
10.1 Kollinearität 29
10.2 Lage von Geraden in der Ebene 30
10.2.1 Lagebestimmung anhand Vektorenvergleich 30
10.2.2 Lagebestimmung durch Schnittpunktbestimmung 32
10.3. Schnittpunkt zweier Geraden im IR^3 36
12. Schnittwinkel zweier Vektoren/Geraden 38
12.1. Schnittwinkel zweier Vektoren 38
12.2 Schnittwinkel zwischen zwei Geraden 39
13. Darstellung einer Ebene 41
13.1. Formen der Ebenendarstellung 41
13.2 Zeichnen einer Ebene 43
13.3 Umwandlung der verschiedenen Ebenendarstellungen. 45
14. Lage von Gerade und Ebene 53
14.1 Lagebestimmung anhand Vergleich Richtungsvektoren und Punktprobe 53

14.2 Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte. 58
15 Lage zweier Ebenen 60
16 Dreieck, Lotgerade und Spiegelung 70
17 Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen 78
Übungsaufgabe 82
Lösungsschritte 82
Antwort 83
18 Abstandsberechnungen 83
18.1 Abstand Punkt – Gerade im IR^2 und Punkt - Ebene im IR^3 84
18.1.1 Abstandsbestimmung Punkt-Gerade mit Lotfußpunktverfahren (Hilfsgerade) 84
18.1.2. Abstandsbestimmung Punkt-Ebene mit Lotfußpunktverfahren (Hilfsgerade) 87
18.2 Abstandsberechnungen mit der Hesse‘schen Normalenform 91
18.2.1. Die Hesse’sche Normalenform mit dem Normalenvektor n_0 91
18.2.2. Abstandsberechnungen Punkt-Gerade mit der Hesse´schen Normalenform 93
18.2.3. Abstandbestimmung Punkt-Ebene mit der Hesse´schen Normalenform 96
18.3. Abstand Punkt -Gerade im IR^3 98
18.4 Abstand zweier Geraden 100
18.5.1 Abstandbestimmung mit Hilfsebene 101
18.5.2 Abstandsbestimmung mit Hesse´scher Normalenform 103
18.6. Zusammenfassung 105

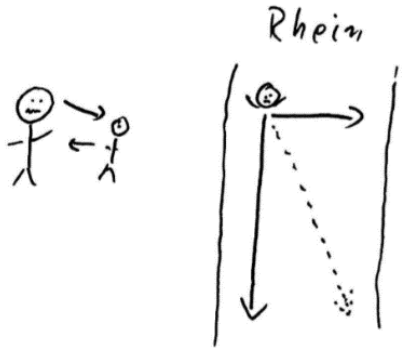
0 Einleitung

Üblicherweise beginnt das Thema Vektorrechnung mit einer Wiederholung, wie man Gleichungssysteme löst und führt dabei die Matrizenrechnung bzw. das Gauß-Jordan-Verfahren ein.

Da ich dies schon im Skript „Matrizenrechnung“ beschrieben habe, steige ich direkt mit der Definition des Vektorbegriffs ein.

1. Definition des Vektors

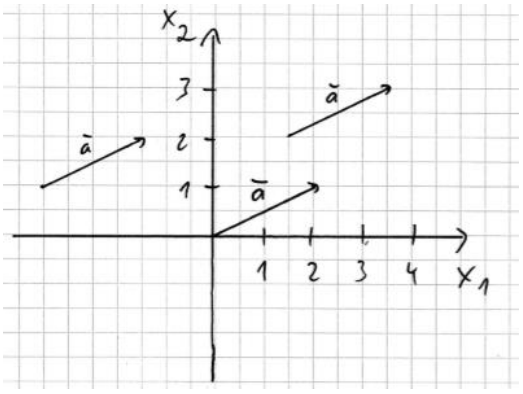
Vektoren sind schon aus Physik bekannt. Dort dienen die Pfeile um z.B. Kräfte oder Strömungen/Verschiebungen zu veranschaulichen.



Einführung: Wir bezeichnen alle Verschiebungen / Pfeile in einer Ebene oder in einem Raum als Vektoren. Vektoren sind gekennzeichnet durch ihre

- Länge
- Richtung
- (Orientierung)

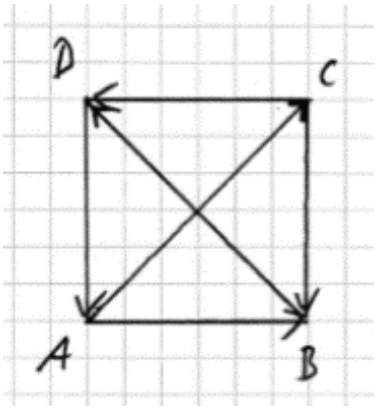
Alle Pfeile mit gleicher Länge, Richtung und Orientierung nennen wir die Pfeilklasse und oder ebenfalls Vektor. Ein *konkreter* Pfeil ist ein Repräsentant der Pfeilklasse. Somit bezeichnet der Begriff „Vektor“ sowohl einen konkreten Vektor als auch seine Pfeilklasse.



Aufgabe: Welche zu dem Quadrat eingezeichneten Pfeile gehören zum Vektor $\bar{a}$?

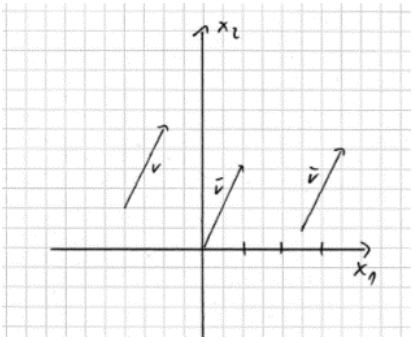
a) $\bar{a} = \overrightarrow{DA}$ Lösung: Pfeil mit gleicher Länge, Richtung und Orientierung: $\overrightarrow{CB}$

b) $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$ Lösung: Es gibt keinen entsprechenden Pfeil



Um Vektoren im Koordinatensystem darzustellen, verwendet man Spaltenvektoren:

In der Ebene IR²	Im Raum IR³
$\vec{v} = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix}$



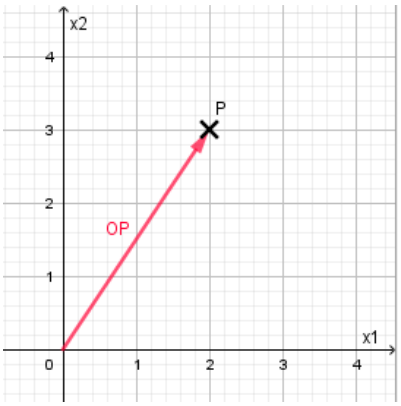
Bsp: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder aber auch statt einem Pfeil nur ein Strich: $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vereinbarung: Punkte geben wir in Zeilenform an: A(2|3) und Vektoren in Spaltenform $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

an.

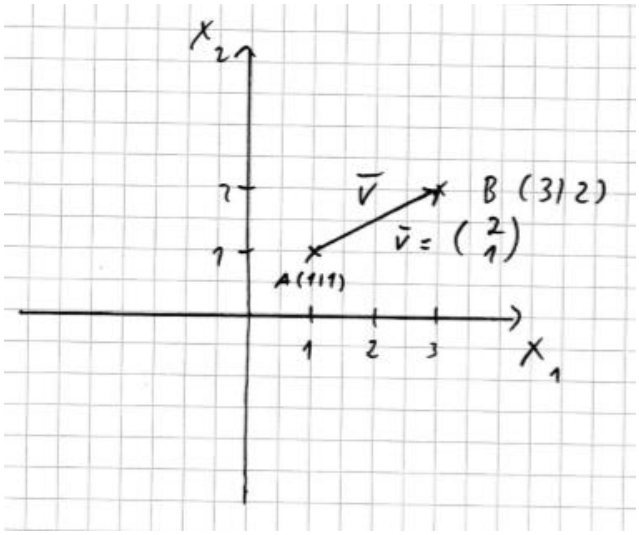
Den Vektor, der im Ursprung beginnt, nennen wir den Ortsvektor

$\overrightarrow{OP}$ zum Punkt P.



Vektoren und Punkte

Vektoren kann man auch als Verschiebung eines Punktes oder als Verbindung zwischen zwei Punkten angeben:



Beispiel: Zeichne die Punkte A(1|1) und B(3|2) in ein Koordinatensystem. Wie lautet der Pfeil, der Punkt A nach Punkt B verschiebt?

Lösung:

Den Vektor p erhält man auch durch folgende Rechnung:

$$\bar{p} = \overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Sei A(2|5) und B(-1|3). Bestimme die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$ und zeichne die Vektoren zur Veranschaulichung in zwei unterschiedliche Koordinatensysteme.

Lösung:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

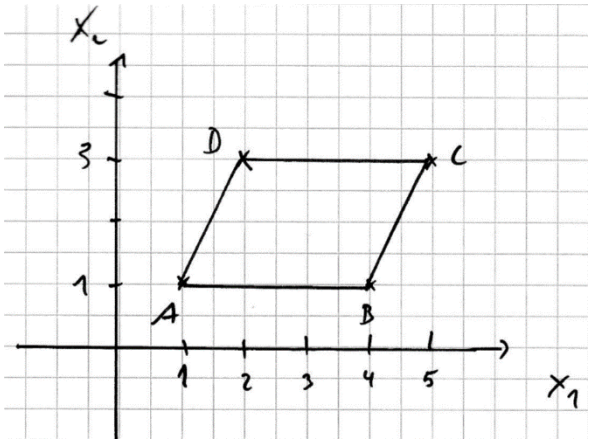
$$\overrightarrow{BA} = A - B = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diesen Vektor nennen wir Verbindungsvektor. Im Grunde ist ein Ortsvektor ein Verbindungsvektor vom Koordinatenursprung P(0|0) zu einem Punkt.

Aufgabe:

Zeige mit Hilfe der Vektorschreibweise, dass das folgende Viereck ein Parallelogramm ist.

Zur Erinnerung: Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und damit gleich lang sind.

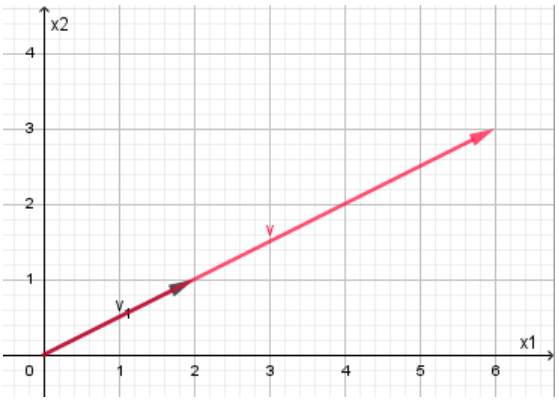


Es gilt offensichtlich: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Damit kann es nur ein Parallelogramm sein.

2. Rechnen mit Vektoren

Mit Vektoren kann man auch rechnen.

Für die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl a legen wir folgende Regel fest.



$$a \cdot \vec{v} = a \cdot \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v1 \\ a \cdot v2 \end{pmatrix} \text{ mit a} \in IR$$

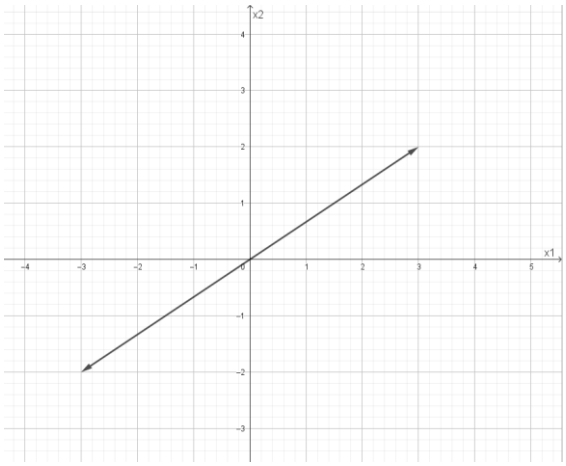
Beispiel: Sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und a = 3. Daraus ergibt sich folgende Multiplikation:

$$a \cdot \vec{v} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Anmerkung. Diese Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (Skalar) nennen wir Skalarmultiplikation. Geometrisch lässt sich diese Multiplikation als Verlängerung des Vektors auffassen.

Multipliziert man einen Vektor mit – 1 erhält man den Gegenvektor.

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$



Vektoren lassen sich auch addieren / subtrahieren. Definieren wir folgende Addition:

$$\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 + b1 \\ a2 + b2 \end{pmatrix}$$

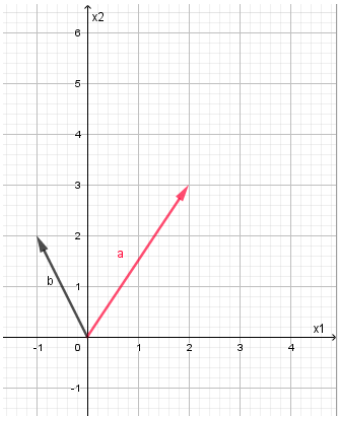
$$Bsp: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-1) \\ 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

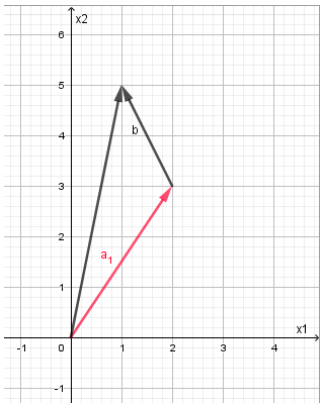
Die Rechnungen gelten auch im dreidimensionalen Raum:

$$Bsp: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dies kann man auch graphisch deuten:

Man setzt einen Vektor an die Pfeilspitze des anderen Vektors.





Die Subtraktion kann man auch als Addition mit dem Gegenvektor auffassen:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

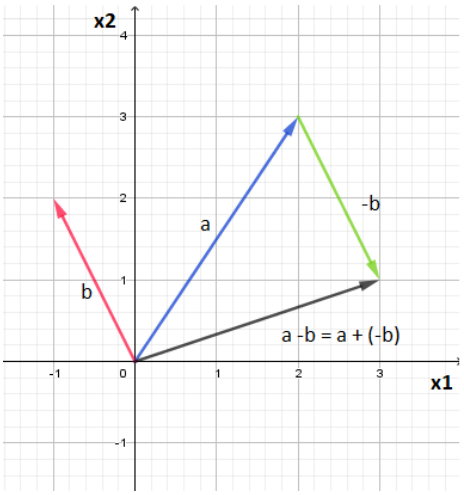
$$Bsp: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

Graphisch sieht das folgendermaßen aus:

Man nimmt zuerst vom Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den Gegenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ diesen setzt man an den anderen und

erhält so den neuen Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Aufgabe: Fritz möchte gerne zu Susi gehen. Leider wohnen beide im Vektorland, weswegen Fritz nur in Richtung der beiden Vektoren laufen kann. Welchen Weg muss er gehen, damit er zu Susi kommt. Wird er immer bei Susi ankommen, egal wo sich die beiden befinden?

Anmerkung: Vektoren kann man auch mit 0,5 multiplizieren und damit verkleinern.

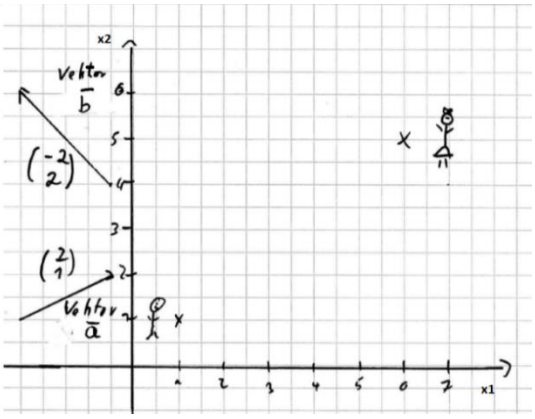
Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ *und* $\vec{c}$.

Die Zahlen r, s, t heißen Koeffizienten.

Für die Addition von zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gelten :

das Kommutativgesetz $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

das Assoziativgesetz $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$



Für die Multiplikation von reellen Zahlen r und s mit den Vektoren $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ gelten:

das Assoziativgesetz: $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$

die Distributivgesetze: r $\cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ oder (r $+s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$

Beweisen wir beispielhaft das Kommutativgesetz.

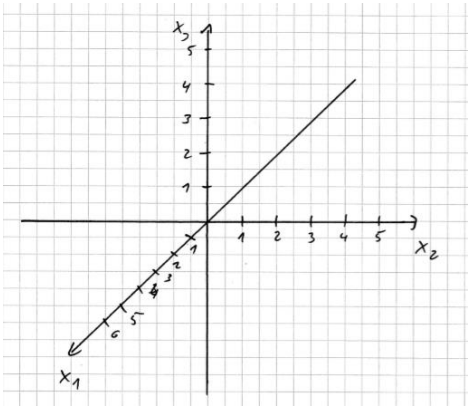
Beh: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Bew: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ ... \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ ... \\ b_n + a_n \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$

da $a_1 + b_1$ aus IR ist □

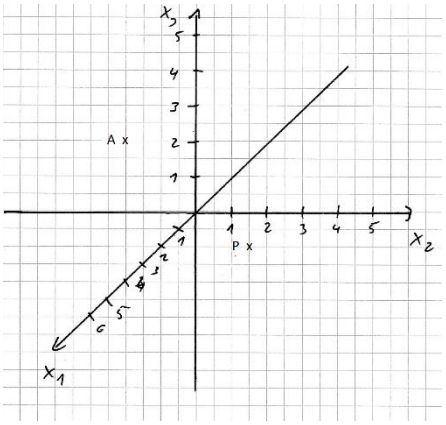
3. Punkte im dreidimensionalen Raum

Um Punkte im dreidimensionalen Raum anzugeben, zeichnen wir folgendes Koordinatensystem:



Die x_2 und die x_3 Achse verwendet einen Zentimeter als Maßstab. Die x_1 Achse ist etwas verkürzt, um einen dreidimensionalen Effekt zu erzielen.

Den Punkt A (2|-1|3) zeichnet man nun folgendermaßen ein: Man geht auf der x-Achse 2 Einheiten entlang. Dann eine Einheit nach links und zwei Einheiten nach oben.



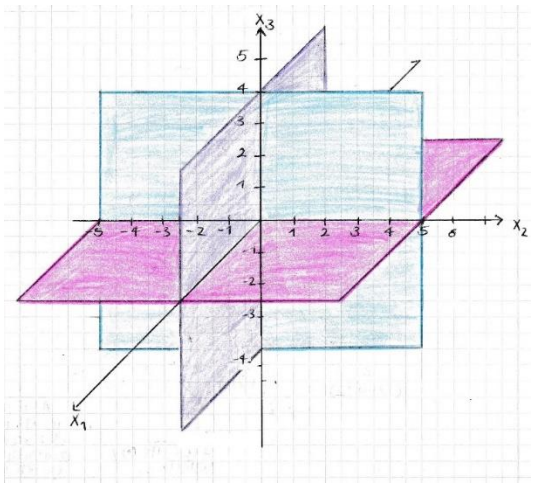
Eindeutig ablesen kann man einen Punkt allerdings nicht.

Der Punkt P kann sowohl folgende Koordinaten haben (2| 2,5 |0)

als auch (-1|1|-1,5).

Die drei Koordinatenachsen spannen dabei drei Ebenen auf:

Die x_1 x_2 Ebene wird durch die x_1 Koordinate und die x_2 Koordinate aufgespannt.



Beispiel für einen Punkt, der in dieser Ebene liegt:

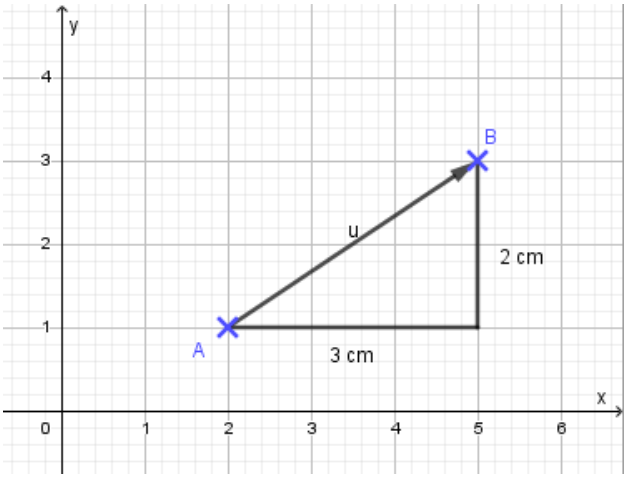
P(2 | 3 | 0). Also jeweils ein Eintrag ist Null.

Aufgabe:

Auf welcher Ebenen liegen folgende Punkte: $A\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} und\ C\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}$?

Antwort: Der Punkt A liegt auf der x_1 x_2 Ebene, B auf der x_1 x_3 Ebene und C auf der x_2 x_3 Ebene

4. Betrag eines Vektors - Abstand zweier Punkte



Einstieg:

Gegeben sind die Punkte A(2|1) und B(5|3). Wie weit sind die Punkte entfernt?

1. Stelle Verbindungsvektor auf:

$$\bar{u} = \left|\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right| = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

2. Berechne die Länge des Verbindungsvektors

   Betrachtet man die Punkte im Koordinatensystem erkennt man, dass man die Länge des Verbindungsvektors $\bar{u}$ bzw. den Abstand der Punkte mit Pythagoras berechnen kann. Es gilt:

   $a^2 + b^2 = u^2$ bzw. $u = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ LE

Meinen wir die Länge eines Vektors, die immer positiv ist, so sprechen wir vom „Betrag eines Vektors“ und führen ein:

Für den Betrag eines Vektors legen wir fest: $\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$

Am obigen Beispiel:

$$\bar{u} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

Im dreidimensionalen Raum gilt:

Für den Betrag eines Vektors legen wir fest: $\left|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}$

Aufgabe: Berechne den Betrag des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung: $|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$

Der Betrag gibt auch die Länge des Vektors an. Dies veranschaulicht man sich am besten in einem Koordinatensystem.

Aufgabe: Berechne die Länge des Vektors. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|\vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$ LE

Da in der Aufgabe keine Maßeinheit für die Länge (Zentimeter, Meter, …) genannt wurde, schreiben wir einfach nur „LE“ für „Längeneinheiten“.

Anmerkung: Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3. Möchte man diesen Vektor auf die Länge 1 kürzen, so muss man diesen durch 3 teilen, bzw. mit $\frac{1}{3}$ multiplizieren. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$. Dieser Vektor hat nun die Länge 1 und wird als Einheitsvektor bezeichnet.

Aufgabe: Die beiden Bonifaziustürme in Mainz sind mit 95 m die höchsten Gebäude der Stadt. Die höchste Etage befindet sich bei A(70|40|95). Ein Ballonfahrer befindet sich bei B(30|70|95). (Alle Angaben in Meter!)

Wie weit ist der Ballonfahrer von den Bonifaziustürmen entfernt? Woran kann man erkennen, dass sich der Ballonfahrer auf gleicher Höhe mit dem Dach befindet?

$$\bar{u} = \left| \begin{pmatrix} 70 \\ 40 \\ 95 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \\ 95 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{40^2 + (-30)^2 + 0^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50m$$

Antwort: Der Ballonfahrer befindet sich 50 Meter vom Dach entfernt. Da der dritte Eintrag mit 95m bei beiden gleich ist, befinden sie sich auf gleicher Höhe.

5. Das Skalarprodukt

Bisher können wir Vektoren addieren /subtrahieren bzw. mit einem Skalar (= Zahl) multiplizieren.

Wie kann man aber sinnvoll zwei Vektoren miteinander multiplizieren? Hierzu legen wir folgende Multiplikation fest und nennen sie Skalarprodukt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot a_3$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -4 + 3 - 4 = -5$

Das Ergebnis des Skalarprodukts ist also eine Zahl (Skalar) und kein Vektor.

Bei der Skalarmultiplikation wird also eine Zahl und ein Vektor multipliziert. Beim Skalarprodukt multipliziert man zwei Vektoren und erhält eine Zahl.

Aufgaben:

1. Multipliziere: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2 + 3 - 0 = 5$

2. Bestimme a so, dass die folgende Gleichung gilt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot a - 2 \cdot (-3) = 0$$

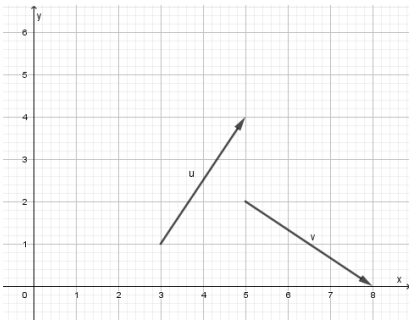
$$2 + 2a + 6 = 0$$

$$2a - 8 = 0$$

$$2a = 8$$

$$a = 4$$

3. Berechne $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ und zeichne anschließend die Vektoren in ein Koordinatensystem. Was stellst du fest?



$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$

Satz: Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich 0, dann sind die Vektoren orthogonal (rechtwinklig) zueinander.

Aufgabe: Finden einen Vektor, der zu $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ orthogonal ist:

Ansatz: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$

$3x + 4y = 0$

Nun sucht man sich für x und y Zahlen aus, die die Gleichung erfüllen: x = 8 und y = -6, also $\begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix}$.

$3 \cdot 8 + 4 \cdot (-6) = 0$

0 = 0

Man schreibt: $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}8\\-6\end{pmatrix} = 0$.

Selbstverständlich sind auch alle kollinearen Vektoren, also alle Vielfachen orthogonal zu dem Vektor:

Also; $\begin{pmatrix}16\\-12\end{pmatrix}$oder $\begin{pmatrix}-8\\+6\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ aber auch $\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$. Dies bringt uns zu folgendem Verfahren:

Anstatt dies mit einem Gleichungssystem zu lösen, kann man einen orthogonalen Vektor finden, indem man die Einträge vertauscht und eines der beiden Vorzeichen ändert.

Gegeben: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

Einträge vertauschen und ein Vorzeichen ändern: $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$. Durch nachrechnen, zeigt man leicht, dass gilt: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = 0$.

Für Vektoren mit drei Einträgen gilt folgendes Verfahren:

Einen Eintrag gleich 0 setzen. Die anderen beiden vertauschen und ein Vorzeichen ändern.

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ Gemäß unserem Verfahren ist der folgende Vektor orthogonal: $\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Auch dies kann man durch Ausrechnen leicht zeigen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0$$

Bestimme einen orthogonalen Vektor zu $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und zeige durch Rechnung, dass dieser wirklich orthogonal ist.

Lösung:

$\begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist zum Beispiel orthogonal.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = -2 + 2 = 0$$

Für das Skalarprodukt gelten folgende Eigenschaften:

Eigenschaften des Skalarprodukts

Für das Skalarprodukt von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gilt:

1. $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$
2. $r\vec{a} \circ \vec{b} = r\,(\vec{a} \circ \vec{b}), \qquad r \in R$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \circ \vec{c} = \vec{a} \circ \vec{c} + \vec{b} \circ \vec{c}$
4. $\vec{a} \circ \vec{a} \neq 0;\ \vec{a} \circ \vec{a} = 0\ nur\ f\ddot{u}r\ \vec{a} = 0$

Exemplarisch beweisen wir den ersten Satz:

1. Beh: $\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$

Bew: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ qed.

Diese Vertauschung kann man machen, da dies in IR gilt

Aufgabe: Die Punkte A(2|1), B(6|1) und C(6|4) spannen ein Dreieck auf. Zeige dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Idee: Berechne die Verbindungsvektoren und prüfe, ob zwei davon orthogonal sind.

$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overline{AC} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\overline{BC} = \begin{pmatrix} 6-6 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

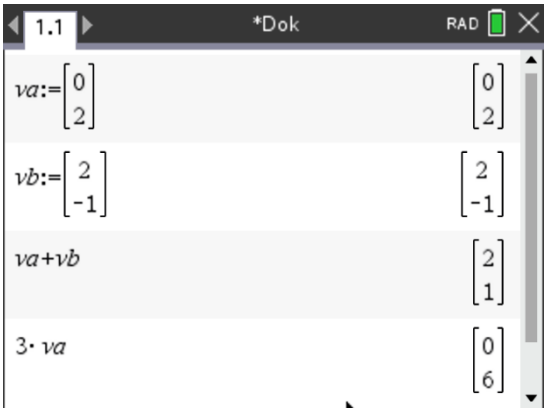
$\overline{AB} \circ \overline{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \neq 0$

$\overline{AB} \circ \overline{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$

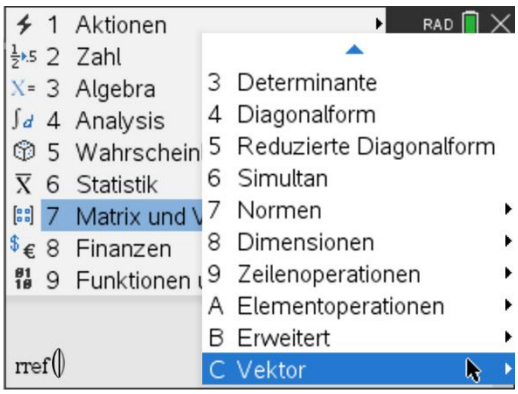
Also $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ => Das Dreieck ist rechtwinklig.

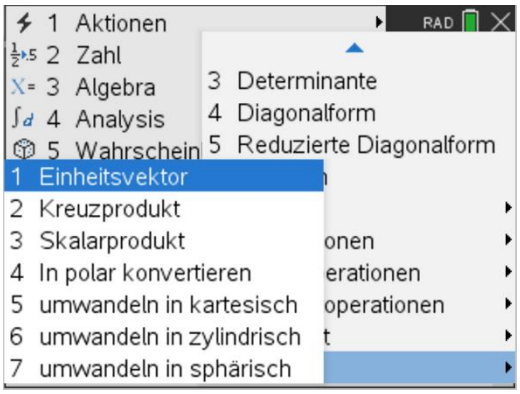
Exkurs: Vektorrechnung mit dem GTR

Vektoren definieren und einfache Rechnungen kann man direkt im Calculatorfenster durchführen:



Möchte man die bisherigen Rechnungen mit dem GTR ausführen, dann findet man hier die entsprechenden Befehle:





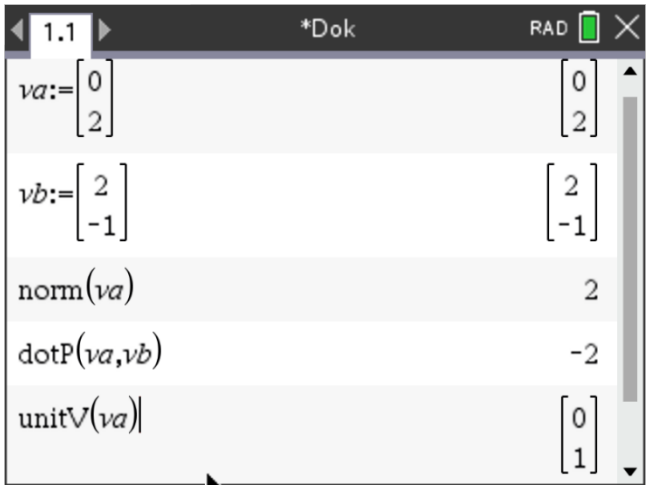
Den Betrag eines Vektors berechnet man mit „norm( )“

Das Skalarprodukt ermittelt man mir dotP(,)

und den Einheitsvektor findet man mit unitV(va).

Vorsicht: Steht in der Aufgabe „Berechne ausführlich“ so reicht es nicht die Rechnung einfach in den GTR

einzutippen. Lediglich bei den Operatoren „Ermitteln“ und „Bestimme“ ist der Weg freigestellt.



6. Winkel zwischen zwei Vektoren

Leitet man das Skalarprodukt ordentlich her, so erhält man folgende Formel:

$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\varphi$ (Mit „ φ" ist der griechische Buchstabe „Phi“ gemeint.)

Diese Formel kann man nun umstellen, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu errechnen:

$$\cos\varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

Achtung: Bei dieser Formel zur Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren stehen keine Betragstriche im Zähler!

Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren: $\binom{1}{5}$ und $\binom{3}{7}$.

1. Man berechnet zunächst das **Skalarprodukt** der beiden Vektoren.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38$$

2. Der Betrag eines Vektors bedeutet, dass die **Länge eines Vektors** errechnet wird. Dazu wird, wie schon bekannt, der **Satz des Pythagoras** verwendet.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

3. Die Werte werden nun in die Schnittwinkelformel eingesetzt.

$$\cos\varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} = \frac{38}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{58}} = 0{,}99$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0{,}99) \approx 11{,}89°$$

Beispiel:

Berechne den Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. **Skalarprodukt** aus den beiden Vektoren.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

2. **Der Betrag** eines Vektors: $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

3. Die Werte werden nun eingesetzt in die Schnittwinkelformel.

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{3 \cdot \sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = 125{,}26°$$

Aufgabe: Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{27}}\right) = 47{,}23°$

Anmerkung: Schon jetzt kann man sich denken, dass wir später den Winkel zwischen zwei Gerade ausrechnen, indem man die Winkel zwischen den Richtungsvektoren berechnet.

7. Das Kreuzprodukt

Vorübung: Finde einen Vektor, der zu jeweils zu den Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

orthogonal ist.

Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$

Mit dem Skalarprodukt ergeben sich zwei Gleichungen:

I $1n_1 + 2n_2 + 3\,n_3 = 0$ => $n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$

II $7n_1 + 1n_2 + 4n_3 = 0$

I in II: $7(-\,2n_2 - 3\,n_3) + n_2 + 4n_3 = 0$

$-\,14n_2 - 21\,n_3 + n_2 + 4n_3 = 0$

$-13n_2 - 17\,n_3 = 0$

$-13n_2 = 17\,n_3$

$n_3 = -\frac{13n_2}{17}$

Setze $n_2 = 17$ => $n_3 = -13$. Eingesetzt in I $n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$ ergibt sich:

$n_1 = -\,2\cdot 17 - 3 \cdot (-13) = -\,34 + 39 = 5$

Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\bar{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -13 \end{pmatrix}$.

Anmerkung: Wir haben $n_2 = 17$ gewählt, damit sich das mit dem Nenner kürzt und wir für n_3 keinen Bruch erhalten.

Würde man diese Rechnung nicht mit konkreten Zahlen, sondern allgemein durchführen, dann würden wir Kreuszprodukt bzw. das Vektorprodukt herleiten:

Definition: Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

(lies: „ $\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$“) das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Satz: Es gilt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist sowohl orthogonal zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$.

Beispiel: Berechne das Kreuzprodukt der beiden Vektoren: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 4 - 3\cdot 1\\-(1\cdot 4 - 3\cdot 7)\\1\cdot 1 - 2\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\17\\-13\end{pmatrix}$.

Möchte man also eine Zeile des Kreuzprodukts berechnen, so multipliziert man die anderen beiden Einträge und subtrahiert sie. Beim mittleren Eintrag setzt man ein Minus davor.

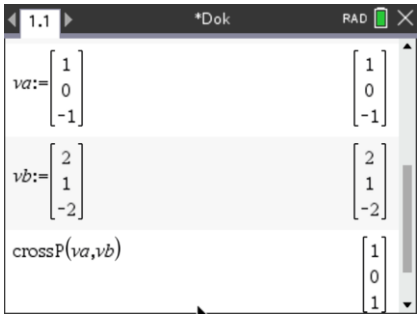
Es gibt auch andere Methoden, das Kreuzprodukt zu berechnen, wie man bei Youtube leicht finden kann.

Aufgabe: Bestimme mithilfe des Vektorproduktes einen orthogonalen Vektor zu den Vektoren:
$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} und \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

z.B. $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot(-2) - (-1)\cdot 1)\\-(1\cdot(-2) - (-1)\cdot 2)\\1\cdot 1 - 0\cdot 2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-(-1)\\-\big(-2-(-2)\big)\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Der orthogonale Vektor ist eindeutig, d.h. es gibt nur einen Vektor, der zu beiden Vektoren orthogonal ist. Allerdings kann der Vektor unterschiedlich lang sein. Daher sind auch alle Vielfache eines Vektors orthogonal, wie z.B. $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$. Aber auch der Vektor $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Diese Vektor „geht“ nur in die andere Richtung.

Im GTR berechnet man das Kreuzprodukt folgendermaßen:



8. Geradendarstellung

„Geraden“ im Koordinatensystem kennen wir bisher nur von den linearen Funktionen y = mx + b.

Nun führen wir eine neue Beschreibung mit Hilfe von Vektoren ein: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Setzen wir für r verschiedene Werte ein, erhalten wir Punkte, die wir in einem Koordinatensystem eintragen können.

Beispiel

r = 2 => $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

r = -1 => $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

Dies kann nun beliebig fortsetzen. Verbindet man alle Punkte mit einander, so erhalten wir eine Gerade.

Daher führen wir folgende Definition ein:

Unter einer Geraden verstehen wir alle Punkte, welche folgende Gleichung erfüllen:

$g: \bar{x} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$.

Dabei bezeichnen wir $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ als den Stützvektor und $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ als den Richtungsvektor.

Beispiel: Zeichne die Gerade $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

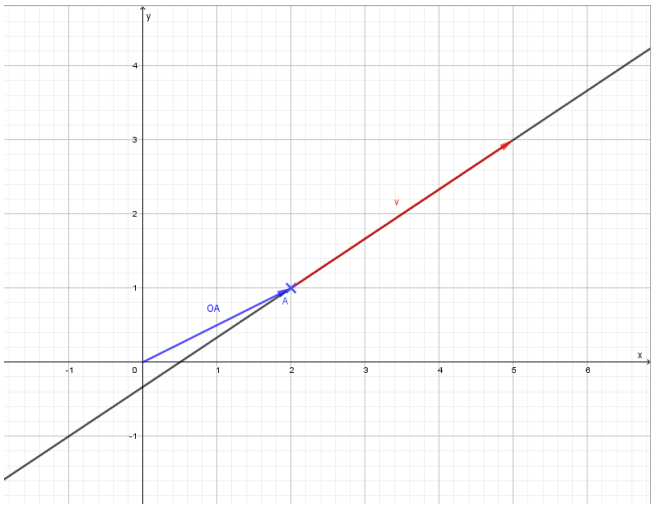
1. Methode:

   Setze für r zwei Werte ein und berechne zwei Punkte, die du dann verbindest:

   r = 0: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

   r = 1: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

   Diese beiden Punkte einzeichnen und verbinden.



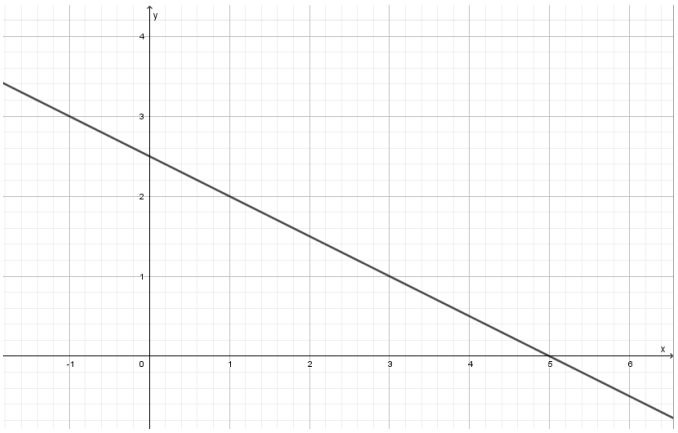
2. Methode

   Zeichne den Stützvektor A (als $\overline{OA}$) ein, hiervon zeichne nun den Richtungsvektor $\binom{3}{2}$ein, indem du 3 nach rechts und 2 nach oben gehst.

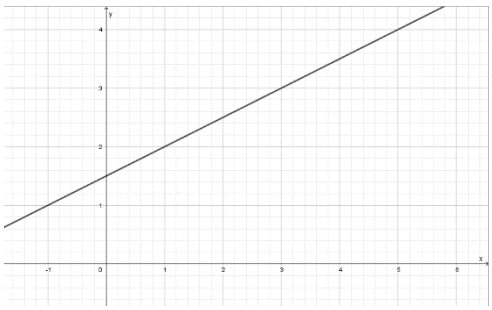
   Aufgabe:

   a) Zeichne die Gerade $g: \bar{x} = \binom{-1}{1} + s\binom{4}{2}$ in ein Koordinatensystem.

   b) Wie lautet die Gleichung der eingezeichneten Geraden?



Lösung zu a:



Lösung zu b: $g: \bar{x} = \binom{1}{2} + s\binom{2}{-1}$. Selbstverständlich gibt es mehrere Lösungen. Man kann einen anderen Stützvektor auswählen oder vom Richtungsvektor ein Vielfaches (Kollinearer Vektor) nehmen.

Gerade aus zwei Punkten erstellen:

Eine Gerade geht durch die Punkte A(2 | 1) und B(5 | 3). Wie lautet die Parameterdarstellung der Geraden?

Rechenweg: Wir nehmen A als Stützvektor und den Verbindungsvektor von A und B als Richtungsvektor:

$g: \bar{x} = (\bar{A}) + s(\overline{AB})$ => $g: \bar{x} = (\bar{A}) + s(\bar{B} - \bar{A})$ => $g: \bar{x} = \binom{2}{1} + s\binom{3}{2}$

Wie man sieht, handelt es sich um die Gerade von oben.

Punktprobe:

Möchte man wissen, ob ein Punkt auf einer Gerade liegt, muss man den Punkt mit der Geraden gleichsetzen. Dann schaut man, ob man ein gemeinsames „S“ findet, sodass die Gleichung erfüllt ist.

Liegen die Punkte A(5| 3) und B(8 | 3) auf der Geraden: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Für Punkt A: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \Rightarrow F\ddot{u}r\ s = 1\ l\ddot{o}sbar$
$\Rightarrow F\ddot{u}r\ s = 1\ l\ddot{o}sbar$

Da die Gleichung lösbar ist, liegt der Punkt auf der Geraden.

Für Punkt B: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} \Rightarrow F\ddot{u}r\ s = 2\ l\ddot{o}sbar$ => Widerspruch
$\Rightarrow F\ddot{u}r\ s = 1\ l\ddot{o}sbar$

Man findet also kein gemeinsames „s“, das diese Gleichung löst. Daher liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Aufgabe:

Beim Segeln

a) Ein Boot startet bei Punkt A(2|1) in Richtung $\bar{a} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Alle Angaben in Seemeilen! Stelle die Geradengleichung auf.
b) Bei B(8|4) befindet sich eine Boje. Befindet sich das Schiff auf Kollisionskurs? Prüfe zeichnerisch und rechnerisch.
c) Wie weit ist die Boje vom Startpunkt aus entfernt?

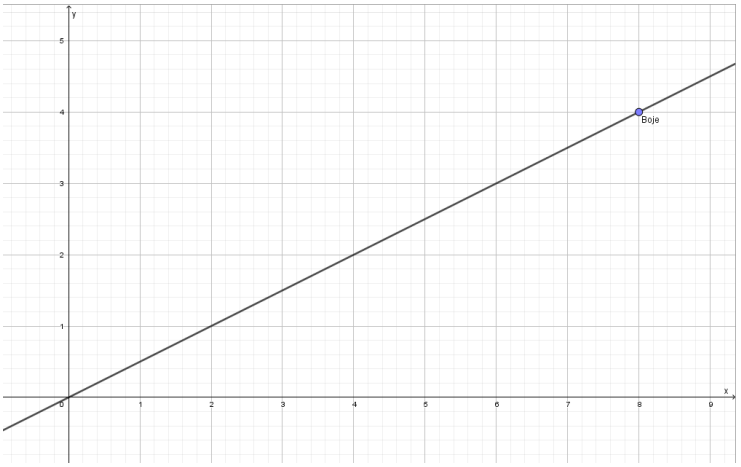
zu a: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

zu b: $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} \Rightarrow Für\ s = 1{,}5\ lösbar$
$\Rightarrow Für\ s = 1.5\ lösbar$

Das Schiff muss seinen Kurs ändern.

zu c: $\bar{u} = \left|\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2} =$
$\sqrt{36+9} = \sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ Seemeilen.

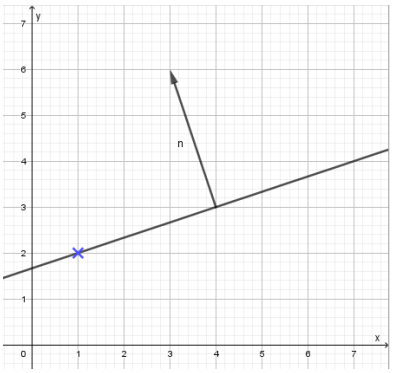
Das Schiff ist ca. 7 Seemeilen von der Boje entfernt.



8. Normalenform und Koordinatenform einer Geraden

8.1 Normalenform der Geraden

Man kann eine Gerade auch eindeutig durch einen Stützvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$und einen senkrechten Vektor, der auf der Geraden steht, angeben.

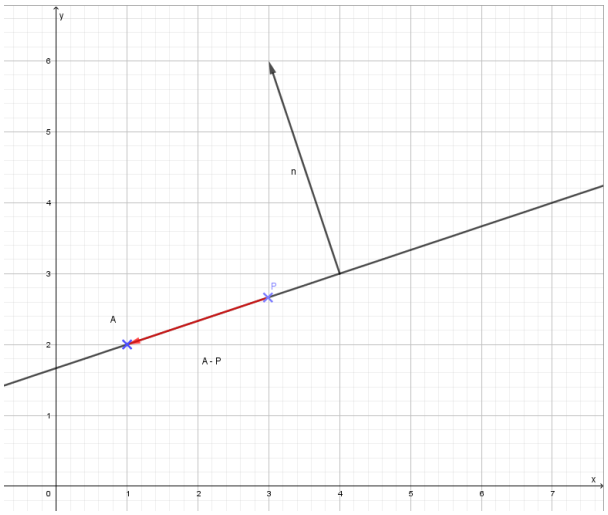


Diesen senkrechten Vektor $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ nennen wir den Normalenvektor.

Die folgende Form heißt daher auch Normalenform einer Geraden:

g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 0$

Auf dieser Geraden liegen also alle Punkte, die diese Gleichung erfüllen.



Es gilt: Alle Punkte P(x_1 | x_2) liegen auf der Geraden für die gilt, dass der Verbindungsvektor von P(x_1 | x_2) zum Ortsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ multipliziert mit dem Normalenvektor $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ Null ergibt. Da die beiden Vektoren (A – P) genauer und der Normalenvektor orthogonal sind, muss die Skalarmultiplikation Null ergeben.

Nehmen wir als Beispiel den Punkt (4|3) und setzen diesen in die Normalenform ein:

g: $\left[(\bar{x}) - \binom{1}{2}\right] \cdot \binom{-1}{3} = 0$ g: $\left[\binom{x}{y} - \binom{1}{2}\right] \cdot \binom{-1}{3} = 0$ g: $\left[\binom{4}{3} - \binom{1}{2}\right] \cdot \binom{-1}{3} = 0$

g: $\left[\binom{3}{1}\right] \cdot \binom{-1}{3} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -3 + 3 = 0$

Das bedeutet: Der Verbindungsvektor $\overline{PA}$ ist orthogonal zum Normalenvektor.

Jeder Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, erfüllt diese Gleichung nicht.

Aufgabe: Prüfe, ob die Punkte A(-1|-3) und B(1|1) auf der Geraden g: $\left[(\bar{x}) - \binom{2}{-1}\right] \cdot \binom{-2}{3} = 0$ liegen.

Lösung: A liegt drauf, B nicht.

Anmerkung: Anstatt Normalenform kann man auch Normalenform oder Normalengleichung sagen. Alle drei Begriffe sind in der Mathematik üblich.

Um eine möglichst einfache Form zu erhalten, sollte man den Normalenvektor immer kürzen.

Vorsicht: Nie den Stützvektor kürzen.

8.2 Umwandlung von Parameterform in Normalenform

Mit der Normalenform kann man manche Rechnungen schneller durchführen. Daher ist es manchmal sinnvoll die Parameterform in Normalenform umzuwandeln. Dies geschieht folgendermaßen:

Gegeben ist die Gerade: $g: \bar{x} = \binom{2}{-1} + s\binom{3}{2}$ Diese wollen wir in folgende Form umwandeln:

$[(\bar{x}) - (Stützvektor)] \cdot (Normalenvektor\ \bar{n}) = 0$

Als Stützvektor können wir den Stützvektor der Parameterform übernehmen: $\left[(\bar{x}) - \binom{2}{-1}\right] \cdot (\bar{n}) = 0$

Nun brauchen wir noch einen Vektor, der zum Richtungsvektor $s\binom{3}{2}$ orthogonal ist. Wieder Einträge vertauschen und ein Vorzeichen ändern. Damit erhalten wir die Normalenform: $\left[(\bar{x}) - \binom{2}{-1}\right] \cdot \binom{-2}{3} = 0$

Ebenso kann man sich leicht überlegen, wie man umgekehrt von der Normalenform zur Parameterform gelangt.

Aufgabe: Wandle die Parameterform in die Normalenform $g: \bar{x} = \binom{3}{-2} + s\binom{4}{-1}$

Lösung: $\left[(\bar{x}) - \binom{3}{-2}\right] \cdot \binom{-1}{4} = 0$

8.3 Von der Normalenform in die Koordinatenform

Die Koordinatenform sieht folgendermaßen aus: 2x + y = 4 . Dies erinnert an die linearen Funktionen:

y = - 2x +4.

Auch mit dieser Form kann man viele Rechnungen einfacher ausführen. Wandeln wir daher die Koordinatenform in die Normalenform um:

g: $\left[(\vec{x}) - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ Wir ersetzen $\vec{x}$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und multiplizieren aus.

$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ => $\left[\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ => -2(x - 2) + 3(y +1) = 0

=> -2x + 4 + 3y + 3 = 0 => -2x + 3y + 7 = 0 => -2x + 3y = -7

Betrachten wir die Koordinatenform -2x + 3y = -7. Dann fällt auf, dass die Einträge (Koeffizienten) -2 und 3 dem Normalenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ entsprechen. Mit dieser Erkenntnis. kann man nun auch umgekehrt die Koordinatenform schnell in die Normalenform umwandeln.

Beispiel: Gegeben ist die Koordinatenform – 3x + 1y = 6. Wandle in die Normalenform

$[(\vec{x}) - (Stützvektor)] \cdot (Normalenvektor\ \vec{n}) = 0$ um:

n

$Normalenvektor\ \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ablesen.

Als Stützvektor brauchen wir einen Punkt, der die Gleichung – 3x + 1y = 6 erfüllt. Dies ist zum Beispiel für $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Fall: $-3 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 6 + 0 = 6$. Damit haben wir einen Stützvektor gefunden.

Beides ist die Normalenform eingesetzt, ergibt:

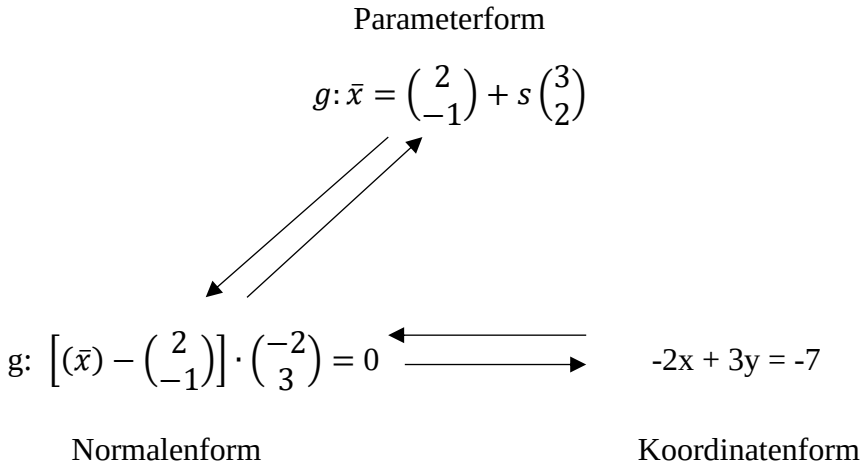
g: $\left[(\vec{x}) - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Tipp. Es bietet sich immer an, den einfachsten Stützvektor zu nehmen, also möglichst mit 0 als Eintrag und möglichst kleinen Zahlen, um damit einfach weiterrechnen zu können.

Aufgabe: Wandle $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$ in die Koordinatenform um und 2x + 4y = 12 in die Normalenform.

Lösung zu a) -x + 5y = 17 und $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

8.4 Zusammenfassung



Wir haben nun drei unterschiedliche Formen der Geradendarstellung kennengelernt. Ebenso wissen wir, wie man die verschiedenen Formen umwandelt. Es gibt auch einen Weg die Koordinatenform in die Parameterform umzuwandeln und umgekehrt. Wer wissen will, wie das geht kann dies im Internet recherchieren. Hier soll es erst einmal so genügen.

9. Geradendarstellung im Raum

9.1 Parameterform der Geraden im IR^3

Wie in der Ebene kann man auch im dreidimensionalen Raum eine Gerade durch die Parameterform angeben. Die Parameterform sieht dann folgendermaßen aus:

$g: \bar{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Beispiel: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Analog zu Kapitel Geradendarstellung kann man nun die gleichen Aufgaben stellen.

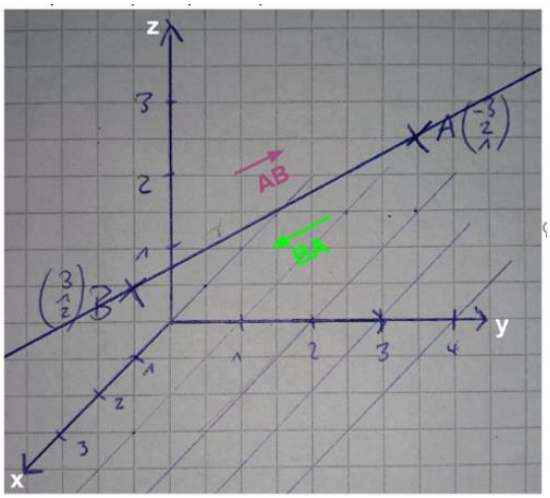
Aufgaben:

Liegt der Punkte P(5 | 1 | -1) auf der Geraden g? Finde einen Punkt, der auf der Geraden g liegt!

9.2 Zeichnen einer Geraden im Raum

Möchte man eine Gerade zeichnen, so kann man zwei Punkte ausrechnen, diese wie in Kapitel 3 beschrieben einzeichnen und dann ausrechnen.

Beispiel Zeichne die Gerade: $g: \bar{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Setzt man r = 0 und r =1 ein, erhält man folgende Punkte, die man dann einzeichnen und verbinden kann:

A(-3|2|1) und B(3|1|2)

Alternative:

1. Zeichne den Stützvektor ein $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Von diesem Stützvektor aus zeichne den Richtungsvektor ein. so erhältst du den zweiten Punkt $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Verbinde die beiden Punkte.

Umgekehrt kann man aus dem Schaubild einer Geraden nicht die Form der Geraden ablesen, da die Punkte nicht eindeutig sind.

Anmerkung: Für den dreidimensionalen Raum IR^3 kann man keine Gerade in Normalenform angeben.

Die naheliegende Form: g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0$ stellt keine Gerade, sondern eine Ebene im dreidimensionalen Raum dar. Ebenso verhält es sich mit der Koordinatenform: 2x + 3y + 4z = 9.

Dies hängt damit zusammen, dass man im dreidimensionalen Raum einen eindeutigen Normalenvektor angeben kann. Dies ist erst eine Dimension höher in der Ebene möglich.

10. Gegenseitige Lage von Geraden

10.1 Kollinearität

Bevor wir die Lage zweier Geraden bestimmen, wiederholen wir den Begriff der „Kollinearität“.

Zwei Vektoren sind kollinear (Vielfache) zueinander, wenn gilt: Es gibt ein r, so dass $\bar{a} = r \cdot \bar{b}$.

Beispiel: Die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ sind kollinear, da gilt:

$\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ = r $\cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}=> r = -2\\=> r = -2\\=> r = -2\end{matrix}$

Dass zwei Vektoren kollinear sind, bedeutet, dass sie die gleiche Richtung haben. Allerdings können sie eine unterschiedliche Orientierung und eine unterschiedliche Länge haben. Die folgenden Vektoren sind kollinear:

Prüfe, ob die Vektoren $\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ kollinear sind:

$\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}$ = r $\cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}=> r = 2\\=> r = 2\\=> r = -1\end{matrix}$ Widerspruch!

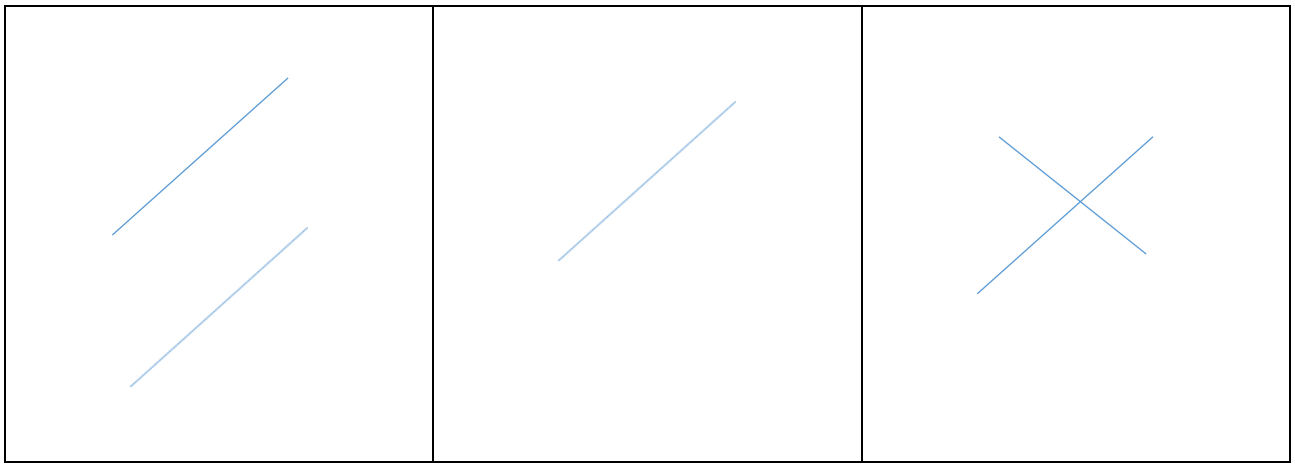
Hier finden wir kein gemeinsames r für alle Zeilen. Daher sind die beiden Vektoren nicht kollinear.

Anmerkung: Anstatt Kollinearität zweier Vektoren, kann man auch sagen, dass die beiden Vektoren linear abhängig sind. Die Begriffe: Abhängigkeit, Unabhängigkeit, Vektorräume, Basis und Dimension werden in diesem Skript nicht behandelt, da sie auch in meinem Unterricht zugunsten der Matrizenrechnung nicht behandelt werden. Zukünftigen Mathematikstudenten rate ich aber sich mit diesen Begriffen eigenständig zu beschäftigen.

10.2 Lage von Geraden in der Ebene

Nun zur Lagebestimmung zweier Geraden.

Zwei Geraden in der Ebenen sind entweder parallel, identisch oder schneiden sich.



10.2.1 Lagebestimmung anhand Vektorenvergleich

Gegeben sind die Geraden $g: \bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ und $h: \bar{x} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$. Bestimme die Lage der Geraden:

1. Vergleich der Richtungsvektoren

Es gilt $\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Rightarrow r = 2$
$\Rightarrow r = 2$

Die beiden Richtungsvektoren sind also kollinear. Da also die Geraden die gleiche Richtung haben, sind sie entweder parallel oder identisch.

2. Punktprobe mit dem Stützvektor

Vorüberlegung: Liegt der Stützvektor der einen Geraden auf der anderen Geraden, dann sind die die Geraden identisch. Liegt der Stützvektor nicht drauf, dann sind die Geraden echt parallel.

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \Rightarrow 1 + 3r = 3 \quad \Rightarrow \quad 3r = 2 \Rightarrow r = 2/3$$
$$=> 2 + r = 6 \quad => r = 4$$

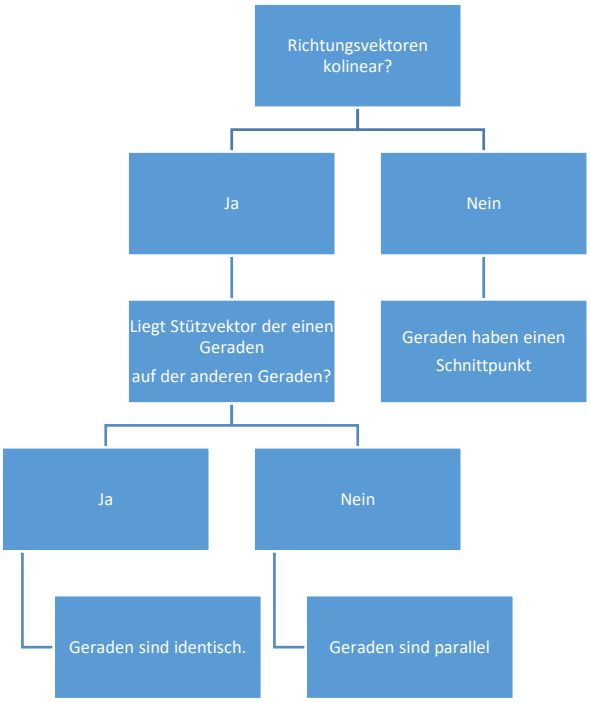
Da es kein gemeinsames r bei der Punktprobe gibt, liegt der Stützvektor von h nicht auf der Gerade g. Daher sind die Geraden echt parallel.

Vorsicht!

Immer wieder sieht man den Fehler, dass Schüler zunächst überprüfen, ob die Richtungsvektoren kollinear sind. Ist dies der Fall, wird als nächstes überprüft, ob die Stützvektoren kollinear zueinander sind. Stellt dann der Schüler fest, dass die Ortsvektoren kollinear sind, dann wird behauptet, dass die Geraden identisch sind. Das ist aber leider völlig falsch, wie folgende Zeichnung veranschaulicht.

Zeichnung

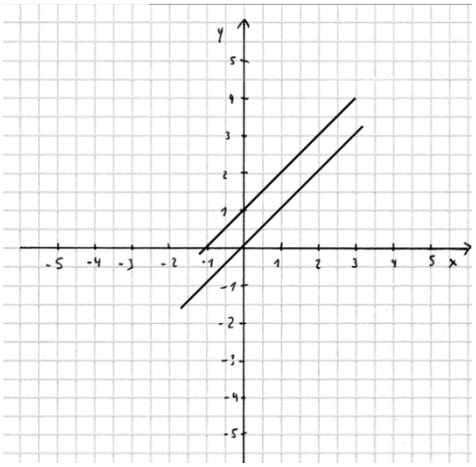
Zusammenfassung



10.2.2 Lagebestimmung durch Schnittpunktbestimmung

Grundidee: Man setzt die beiden Geraden gleich, um zu ermitteln, wie viele Schnittpunkte zwei Geraden haben. Gibt es unendlich viele Schnittpunkte, dann liegen die beiden Geraden aufeinander, gibt es keinen Schnittpunkt, dann sind die Geraden parallel und wenn es einen Schnittpunkt gibt, dann schneiden sich beide.

Beispiel für parallele Geraden:



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bevor wir die beiden Gerade gleichsetzen, ändern wir ein s in ein t um, da es sich um unterschiedliche „Variablen“ handelt.

Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I $0 + 1s = 0 + 1t \quad \Rightarrow \quad s = t$

II $1 + s = 0 + t \quad \Rightarrow 1 + s = t$

I in II $1 + t = t \mid -t$

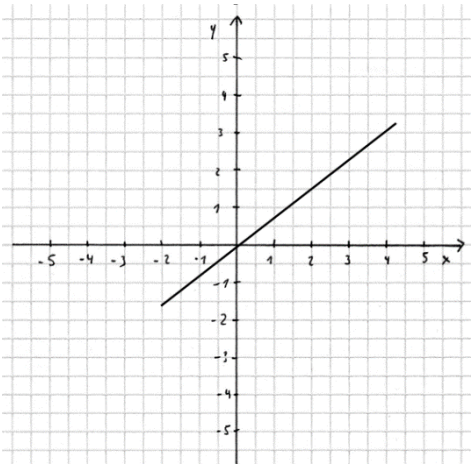
$1 = 0$ WIDERSPRUCH, daher keine Lösung !!! IL = { }

=> Es gibt keinen Schnittpunkt. Die Geraden sind echt parallel zueinander.

Beispiel für identische Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I $0 + s = 1 + 2t \Rightarrow s = 1 + 2t$

II $0 + s = 1 + 2t \Rightarrow s = 1 + 2t$

I in II $1 + 2t = 1 + 2t$

$t = t \mid -t$

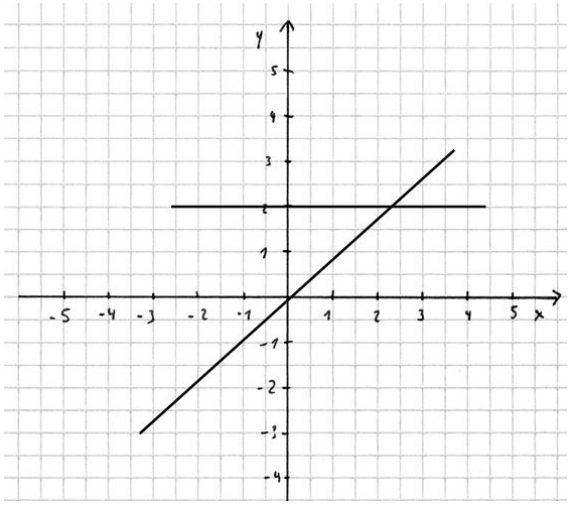
$0 = 0$ wahre Aussage

- ⇨ Es gibt unendlich viele Schnittpunkte.
- ⇨ Geraden liegen aufeinander, bzw. sind identisch

Beispiel für einen Schnittunkt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Gleichsetzungsverfahren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I 0 + s = 0 + t => s = t

II 0 + s = 2 + 0 => s = 2

II = I : t = 2

s = 2 braucht man nicht mehr errechnen, daher gilt folgende Lösung für s und t:

IL = (2; 2)

Um den Schnittpunkt nun zu errechnen, setzt man s oder t in

die jeweilige Gleichung ein

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

oder in die andere Geradengleichung g:

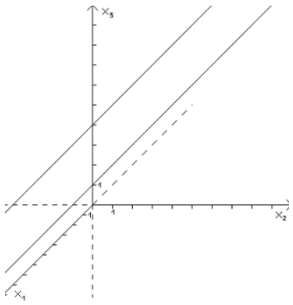
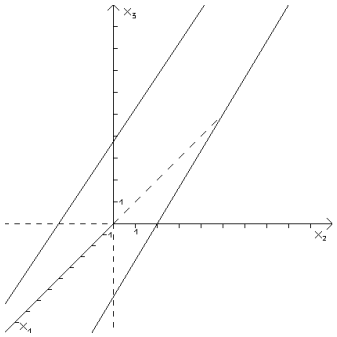
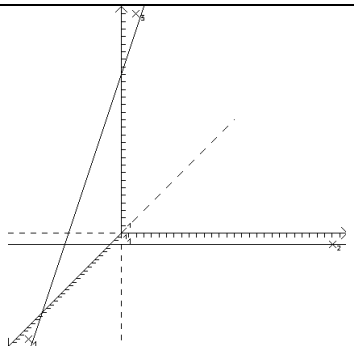
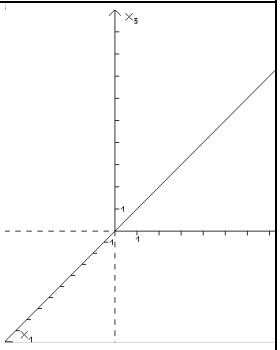
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

=> Schnittpunkt bei S(2 | 2)

$h: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$	g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 0$	2x + 4y = 12
Finde ein Gerade, die zu der jeweiligen Geraden identisch ist.		
Lösung: Vielfaches vom Richtungsvektor nehmen und einen Punkt finden, der auf der Geraden liegt. Vorsicht. Das Vielfache des Ortsvektors liegt in der Regel nicht auf der Geraden, sondern auf der Geraden, die durch den Stützvektor und den Nullpunkt geht. $h: \bar{x} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einen Punkt finden, der auf der Geraden liegt: -1 (x - 1) + 3 (y -2) = 0 -x +1 +3 y - 6 = 0 - x + 3y -5 = 0 - x + 3y = 5 Diese Gleichung erfüllt der Punkt (7 | 4). Den nehmen wir als Stützvektor g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = 0$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einfach den Wert nach dem Gleichheitszeichen belassen. 3x + 8y = 12
Finde ein Gerade, die zu der jeweiligen Geraden echt parallel ist.		
Lösung: Vielfaches vom Richtungsvektor nehmen und einen Punkt finden, der **nicht** auf der Geraden liegt, indem man für s zwei unterschiedliche Werte einsetzt. $h: \bar{x} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einen Punkt finden, der **nicht** auf der Geraden liegt: -1 (x - 1) + 3 (y -2) = 0 -x +1 +3 y - 6 = 0 - x + 3y -5 = 0 - x + 3y = 5 Diese Gleichung wird nicht erfüllt durch Punkt (1 | 1). Den nehmen wir als Stützvektor g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = 0$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einfach den Wert nach dem Gleichheitszeichen ändern: 3x + 8y = 5

**********BIS HIER ÜBERARBEITET**********

10.3. Schnittpunkt zweier Geraden im IR³

Zwei Geraden im R³ können:			
Parallel sein, also keine Schnittpunkte	Aneinander „vorbeilaufen“, also kein Schnittpunkt haben. Wir sagen: „Die Geraden sind windschief “.	Sich schneiden, also einen Schnittpunkt haben.	Aufeinander liegen, also unendlich viele Schnittpunkte haben
Finde jeweils in Beispiel im R^3			
			
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$
Versuche nur durch Rechnung die Lage zu ermitteln			
I 1 + 2s = 1 + t II 2 + 2s = 3 + t III 3 + 2s = 7 + t I in II: 2 + t = 3 + t 0 = 1 ⇒ L = { } Die Geraden sind echt parallel.	I 1 + 1s = 1 + 2t II 4 + 2s = 3 + 3t III 3 + 3s = 8 + 4t aus II - 2 · I folgt: 2 = 1 - t | -1 t = -1 t in I: 1 + 1s = 1 + 2 · (-2) ⇒ s = -2 Einsetzen von t und s in III: 3 + 3 · (-2) = 8 + 4 · (-1) -3 = -1 ⇒ L = { } Die Geraden sind windschief	I 7 + 2s = 4 + t II -2 + 3s = -6 + t III 2 + s = -1 + 2t ⇒ s = -1 ⇒ SP: $\begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-5\\1\end{pmatrix}$ Schnittpunkt: SP(9|-5|1)	I 1 + 2s = 3 + 6t II 1 + 2s = 3 + 6t III 1 + 2s = 3 + 6t ⇒ 0 = 0 ⇒ unendlich viele Lösungen Die Geraden sind identisch.

Bsp.1

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

Bsp.2

$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $j: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Bsp.3

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gruppe 1:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gruppe 2:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gruppe 3:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gruppe 4:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. Schnittwinkel zweier Vektoren/Geraden

12.1. Schnittwinkel zweier Vektoren

Wiederholung: Bei der Herleitung des Skalarproduktes, haben wir folgende Formel eingeführt:

$u \circ v = |u| \cdot |v| \cdot \cos\varphi$ (Mit „ φ" ist der griechische Buchstabe „Phi“ gemeint.)

Diese Formel kann man nun umstellen, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu errechnen:

$$\cos\varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$$

Beispiel: Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$.

1. Man berechnet zunächst das **Skalarprodukt** der beiden Vektoren.

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 1 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 3 + 35 = 38$$

2. Der Betrag eines Vektors bedeutet, dass die **Länge eines Vektors** errechnet wird. Dazu wird der **Satz des Pythagoras** verwendet.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$$

3. Die Werte werden nun in die Schnittwinkelformel eingesetzt.

$$\cos\varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|} = \frac{38}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{58}} = 0{,}99$$

$$\varphi = \cos^{-1}(0{,}99) \approx 11{,}89°$$

Beispiel für zwei Vektoren im IR^3:

Gegeben haben wir die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Skalarprodukt:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = -2 - 2 + 1 = -3$$

2. Betrag der Vektoren:

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$$

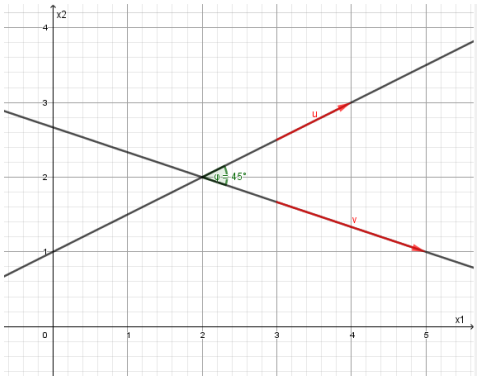
$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

3. Schnittwinkelformel: $\cos\varphi = \frac{u \circ v}{|u| \cdot |v|}$

$$\cos\varphi = \frac{-3}{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -0{,}577$$

$$\varphi = \cos^{-1}(-0{,}577) = 125{,}264°$$

12.2 Schnittwinkel zwischen zwei Geraden



Schneiden sich zwei nicht orthogonale Geraden, so ist ein Winkel immer kleiner als 90° und ein Winkel immer größer als 90°.

Wenn wir vom Schnittwinkel reden, meinen wir den kleineren Winkel.

Der Winkel der Geraden entspricht dann dem Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren der Geraden.

Vorgehen:

1. Überprüfen, ob die beiden Geraden sich schneiden, da sie ja auch windschief oder paarallel sein könnten. Sollten Sie sich schneiden bitte, den Schnittpunkt angeben.
2. Schnittwinkel zwischen den beiden Richtungsvektoren berechnen.

Beispiel: Gegeben sind die beiden Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$. Berechne den Schnittwinkel:

1. Schnittpunkt herausfinden (Gleichsetzen)

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

I $\quad 1 + r = 2 + s$

II $\quad 1 \quad = 2 - s \Rightarrow s = 1$

III $\quad 3r = 3 + 3s$

Hier haben wir schon s direkt mit Gleichung II erhalten: s = 1. Dieses s = 1 setzt man in die Geradengleichung ein: h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\6\end{pmatrix}$. Dann erhält man den Schnittpunkt SP (3|1|6).

2. Schnittwinkel (der Richtungsvektoren) berechnen:

$$\cos\varphi = \frac{|u \circ v|}{|u| \cdot |v|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 3}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 - 1^2 + 3^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{11}} = \frac{10}{\sqrt{110}} = 0{,}95$$

$$\cos\varphi = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \quad \varphi \approx 18{,}19°$$

Klar: Möchte man den größeren Winkel der beiden Geraden berechnen, rechnet man:

$$180° - \varphi$$

Achtung: Im Gegensatz zur Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren stehen nun auf einmal Betragstriche im Zähler der Winkelformel. Die Betragsstriche, die nun im Zähler stehen, garantieren, dass der Bruch ≥ 0 ist und ebenso $\cos\varphi \geq 0$ und somit der Winkel zwischen $0° \leq \alpha \leq 90°$ liegt.

Berechne den Winkel zwischen folgenden Geraden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

Berechne anschließend den Winkel ohne Betragstriche im Zähler. Was fällt auf?

13. Darstellung einer Ebene

13.1. Formen der Ebenendarstellung

Aus Kapitel 7 wissen wir, dass man eine Gerade im IR² auf unterschiedliche Arten darstellen kann.

Zu einer Geraden gehören alle Punkte die z.B. folgende Gleichung erfüllen.

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ Dies war die Parameterform mit Stütz. und Richtungsvektor. Diese Darstellung gibt es auch für eine Ebene:

E: $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$ Die Ebene wird aufgespannt durch zwei Richtungsvektoren und eindeutig festgelegt durch einen Stützvektor.

Eine Gerade konnte man auch eindeutig durch den Stützvektor und dem orthogonalen Vektor (Normalenvektor) bestimmen. Dies führte zur Normalengleichung:

g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = 0$

Diese Darstellung sieht für die Ebene folgendermaßen aus:

E: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix}=0$

Hier wird auch klar, dass es keine Normalenform der Geraden im IR³ geben kann. Ergänzt man einen Eintrag, dann erhält man schon die Geradendarstellung.

Multiplizierte man die Normalenform aus, so erhielt man die Koordinatengleichung:

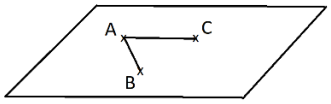
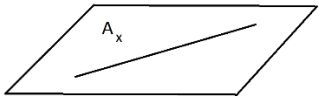
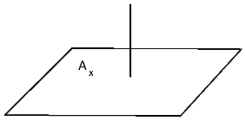
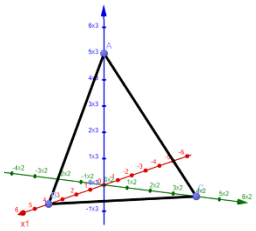
2x + 4 y = 6.

Auch diese Darstellung gibt es für Ebenen:

E: 2x – 3y + 6z = 12

Darstellung einer Ebene

Eine Ebene ist eindeutig bestimmt, durch

Drei Punkte	Ein Punkt und eine Gerade	Stützvektor und Normalenvektor	Durch die Berührpunkte mit den Achsen (Spurpunkte)
			
Parameterform		Normalenform	Koordinatenform
Gegeben: A(2|3|4) , B(3|5|2), C(4|0|1). Wie lautet die Gleichung?	Gegeben: A(2|3|4) und $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$ Wie lautet die Gleichung?	Gegeben: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ und A(3|4|6)	Gegeben sind die Spurpunkte bei x_1 =2, x_2 = 4 und x_3= 6. Daraus muss man eine Gleichung „basteln.“
$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$		$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}=0$	$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

Wie bei den Geradengleichungen gilt: Eine Ebene besteht aus unendlich vielen Punkten, die alle die obenstehenden Gleichungen erfüllen.

Erklärungen:

Zu 1: $E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-3 \\ 2-4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$

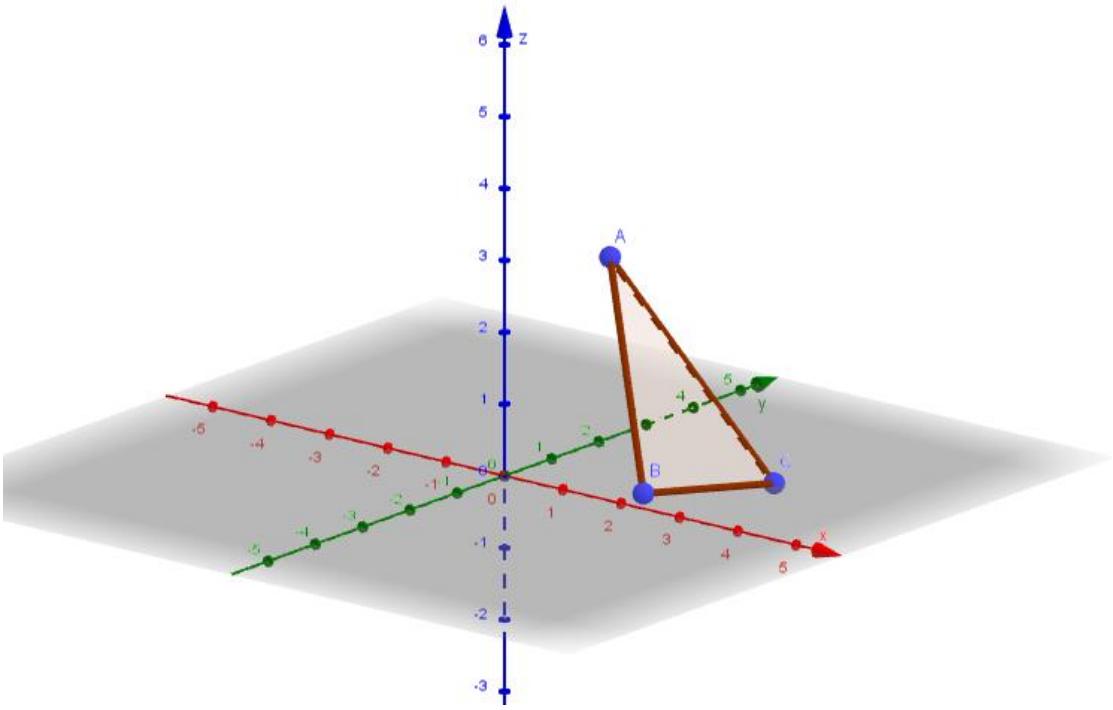
$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Zu 2: Gleiche Rechnung wie bei 1. A als Stützvektor nehmen. 2. Den Verbindungsvektor von A und Stützvektor der Geraden bilden. 3. Den Richtungsvektor der Geraden übernehmen

13.2 Zeichnen einer Ebene

Möchte man eine Ebene in ein dreidimensionales Koordinatensystemzeichnen, so zeichnet man diese Ebene nur als Dreieck.

Beispiel: Zeichne die Ebene, die durch die Punkte A(1|1|3) , B(4|-2|1), C(3|2|0) gegeben ist.



Besonders gut gelingt dies bei der Koordinatendarstellung. Hier berechnet man die Berührpunkte einer Geraden / Ebenen mit den Achsen (Spurpunkte).

Beispiel:

E: 1x + 2y + 3z = 6

Den Spurpunkt erhält man, indem die anderen beiden Einträge gleich Null gesetzt werden:

Erster Punkt A(x | 0 | 0)

1x + 2·0 + 3·0 = 6 => x = 6 => Spurpunkt A(6 | 0 | 0)

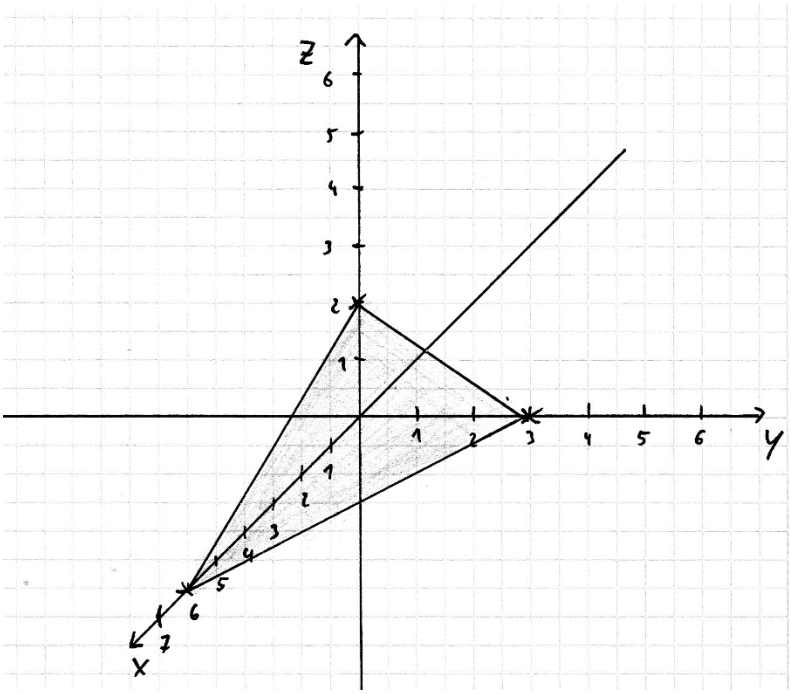
Zweiter Punkt A(0 | y | 0)

1 · 0 + 2·y + 3 · 0 = 6 => y = 3 => Spurpunkt B(0 | 3 | 0)

Dritter Punkt A(0 | 0 |z)

1 · 0 + 2 · 0 + 3 · z = 6 => z = 2 => Spurpunkt C(0 | 0 | 2)

Diese Punkte kann man nun gut einzeichnen.



der Koordinatenform kann man die Lage der Ebene leicht ansehen.

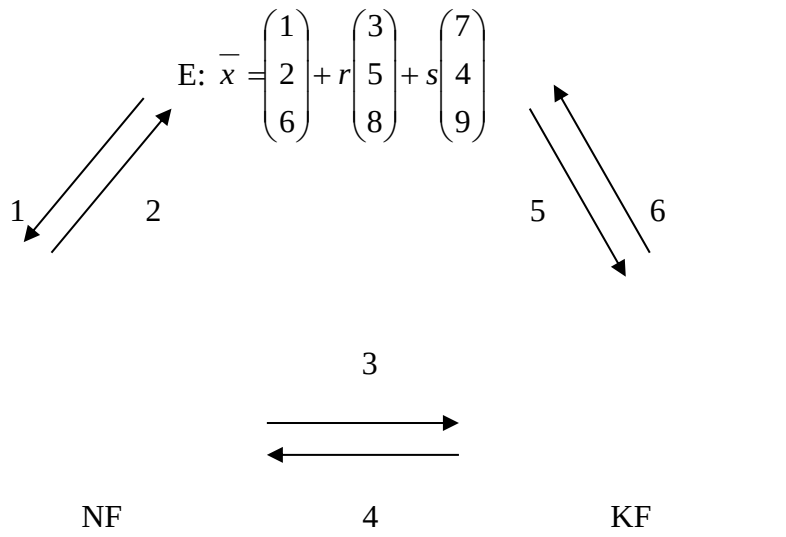
Die Ebene E: 2x + 4y = 8 hat keine z-Koordinate. Das bedeutet, dass die Ebene die z-Achse nicht schneidet. Dafür bei der x-Achse durch 4 und bei der y-Acshe durch 2 geht.

Die Ebene 5z = 10 schneider weder die x-Achse noch die y-Achse. Sie ist also parallel zur Ebene, die von der xy-Ebene aufgespannt wird und scheidet die z-Achse bei z = 2.

13.3 Umwandlung der verschiedenen Ebenendarstellungen.

Umwandlung in die verschiedenen Ebengleichungen. Beispielaufgaben

PF



$$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 0 \qquad 13x + 29y - 23z = -67$$

Beispiel 1: Von der Parameterform in die Normalenform

Parameterform: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$

Um die Normalenform zu bilden, braucht man einen Stützvektor und einen Normalenvektor zu beiden Richtungsvektoren.

Übernahme von Stützvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$

Normalenvektor:

Vektorprodukt von $\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\cdot 9 - 4\cdot 8\\-(3\cdot 9 - 7\cdot 8)\\3\cdot 4 - 7\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix}$

Normalenform:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel 2: Von der Normalenform in die Parameterform

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0 \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Stützvektor Normalenvektor

Der Normalvektor ist orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Parameterform.

→ Um die Richtungsvektoren in der Parameterform herauszufinden, sucht man zwei Vektoren, die

1. orthogonal zum Normalenvektor sind und

2. nicht kollinear zueinander sind.

1. zwei orthogonale Vektoren suchen (Skalarprodukt = 0)

   →Normalvektor mal $\vec{x} = 0$ (Skalarprodukt)

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ -23 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 13x + 25y - 23z = 0, \text{ also } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ebenso bestimmt man den 2. Richtungsvektor, z.B. $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$.

2.Prüfen, ob die beiden kollinear (vielfache) sind: $\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$

→ r = 3/7

→ r = 5/4

→ nicht kollinear

→ Die beiden orthogonalen Vektoren werden zu Richtungsvektoren, den Stützvektor nimmt man aus der Normalenform.

PF: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\5\\8\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}7\\4\\9\end{pmatrix}$

Beispiel 3: Von der Normalenform in die Koordinatenform

$\left[\bar{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 0$ $\quad \bar{x} \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 0$ 1. Normalengleichung vereinfachen

$\bar{x} \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} - 67 = 0$ → $\bar{x} \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 67$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}13\\29\\-23\end{pmatrix} = 67$ 2. Vektor x durch Spaltenkoordinatenform ersetzen

13x + 29y – 23z = 67 3. Ausmultiplizieren ergibt Koordinatengleichung

Beispiel 4: Von der Koordinatenform in die Normalenform

NF KF

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix} = 0 \quad \longleftarrow \quad 13x + 29y - 23z = -67$$

Den Normalenvektor kann man direkt, ablesen: $\begin{pmatrix} 13 \\ 29 \\ -23 \end{pmatrix}$. Um einen Stützvektor zu erhalten, sucht man einen Punkt, der die Gleichung 13x +29y-23z = -67 erfüllt.

Z.B. gilt: 13 · 1 +29 · (2) + 23 · 6 = -67. Zugegeben ist der Punkt nicht immer leicht zu finden, auch wenn in der Unterrichtspraxis die Aufgaben wohl einfacher gewählt sind.

Beispiel 5: Von der Parameterform in die Koordinatenform

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ in 13x +29y-23z = -67

I x = 1 + 3r +7s

II y = 2 + 5r +4s Nun r und s eliminieren.

III z = 6 + 8r +9s

IV : I und II

$5x = 5 + 15r + 35s$

$3y = 6 + 15r + 12s \quad \rightarrow 15r = 3y - 6 - 12s$

IV: II in I $5x = -1 + 3y + 23s$

V : II und III

II $y = 2 + 5r + 4s \rightarrow 8y = 16 + 40r + 32s$

III $z = 6 + 8r + 9s \rightarrow 5z = 30 + 40r + 45s \rightarrow 40r = 5z - 30 - 45s$

V: II in III: $8y = 16 + 5z - 30 - 45s + 32s \rightarrow 8y = -14 + 5z - 13s$

Aus den beiden Gleichungen noch s eliminieren.

IV $5x = -1 + 3y + 23s \mid \cdot 13 \rightarrow 65x = -13 + 39y + 299s \rightarrow 299s = 65x + 13 - 39y$

V $8y = -14 + 5z - 13s \mid \cdot 23 \rightarrow 184y = -322 + 115z - 299s \rightarrow -184y = 322 - 115z + 299s$

Einsetzen: $-184y = 322 - 115z + 65x + 13 - 39y$

$65x + 145y - 115z = -335 \mid :5$

$13x + 29y - 23z = -67$

Anmerkung: Je nach Rechenaufwand empfiehlt es sich die Parameterform in die Normalenform und dann in die Koordinatenform umzuwandeln.

Beispiel 6: Von der Koordinatenform in die Parameterform

Koordinatenform $13x + 29y – 23z = -67$

Setze:

$x = r$ umgeschrieben I $0 + r \cdot 1 + s \cdot 0$

$y = s$ umgeschrieben II $0 + r \cdot 0 + s \cdot 1$

Versuche nun die Koordinatengleichung nach z aufzulösen:

III. $13x + 29y – 23z = -67$ $|-13x \mid -29y$

$-23z = -13x -29y -67 \mid \cdot (-1)$

$23z = 13x + 29y + 67 \mid : 23$

$$z = \frac{13}{23}x + \frac{29}{23}y + \frac{67}{23}$$

Die drei Gleichungen werden folgendermaßen aufgeschrieben:

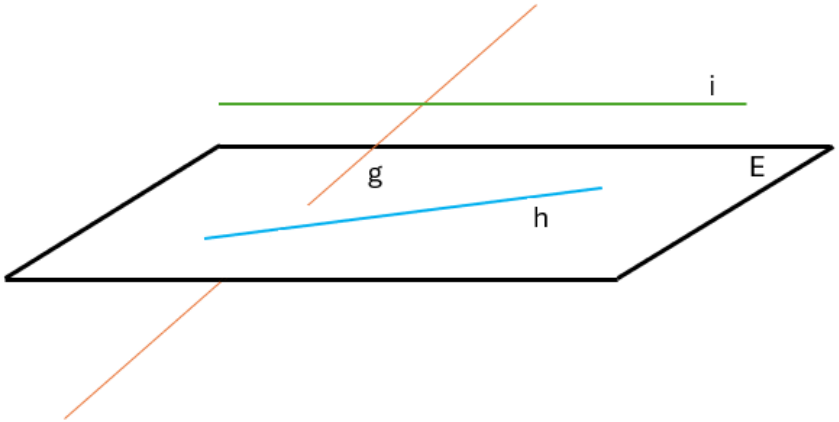
$$\text{E: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & +r\cdot 1 & +s\cdot 0 \\ 0 & +r\cdot 0 & +s\cdot 1 \\ \frac{67}{23} & +r\cdot\frac{13}{23} & +s\cdot\frac{29}{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{67}{23} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{13}{23} \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{29}{23} \end{pmatrix}$$

Die Ebene sieht natürlich nicht mehr aus wie die Ebene oben.

Dass es sich wirklich um die gleiche Ebene handelt, überprüfe jeder selbst, indem er die Ebenen gleichsetzt.

14. Lage von Gerade und Ebene



Eine Gerade und eine Ebene können im IR^3 entweder sich schneiden, parallel sein, oder aufeinander liegen.

Dies kann man ermitteln, indem ähnlich wie im Kapitel 10 „Lage zweier Geraden“ entweder die Richtungsvektoren vergleicht und eine gegeben falls eine Punktprobe durchführt oder indem man die Anzahl der Schnittpunkte bestimmt.

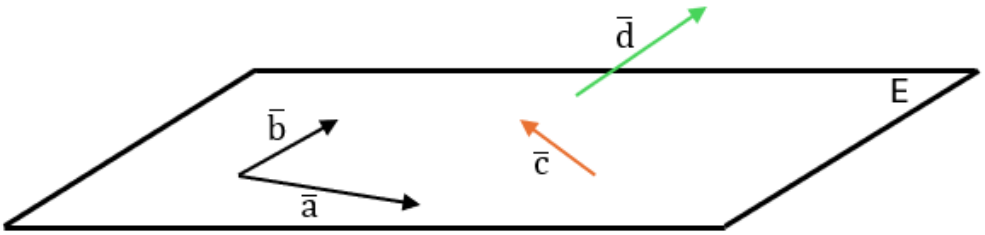
14.1 Lagebestimmung anhand Vergleich Richtungsvektoren und Punktprobe

Die unterschiedliche Lage kann man ermitteln, indem man die Richtungsvektoren vergleicht und eine Punktprobe durchführt.

Vorüberlegung:

Wann liegen drei Vektoren in der gleichen Ebene? Anmerkung: Vektoren haben keine Lage, daher ist die Frage, ob sie in der gleichen Ebene liegen nicht ganz korrekt, aber vereinfacht für unsere Vorstellung

formulieren wir das so.



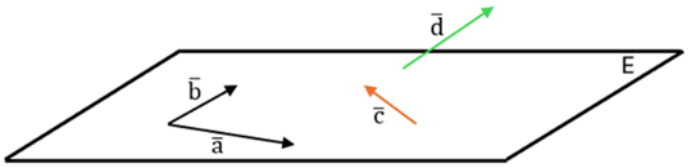
Dies ist der Fall, wenn sie linear abhängig sind. Das heißt, wenn es ein r und ein s gibt, so dass gilt:

$$r \cdot \bar{a} + s \cdot \bar{b} = \bar{c}$$

Beispiel:

Sei $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\bar{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Liegt der Vektor $\bar{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der Ebene?



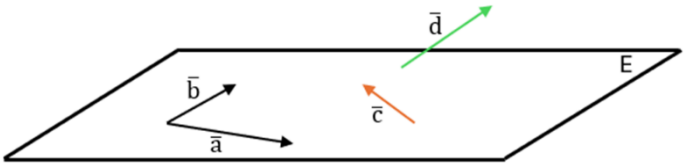
Rechnung:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Rechnung zeigen wir: Gleichung ist für r = 2 und s = 1 lösbar.

Daher liegen die drei Vektoren in einer Ebene.

b) Liegt der Vektor $\bar{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Ebene?



$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

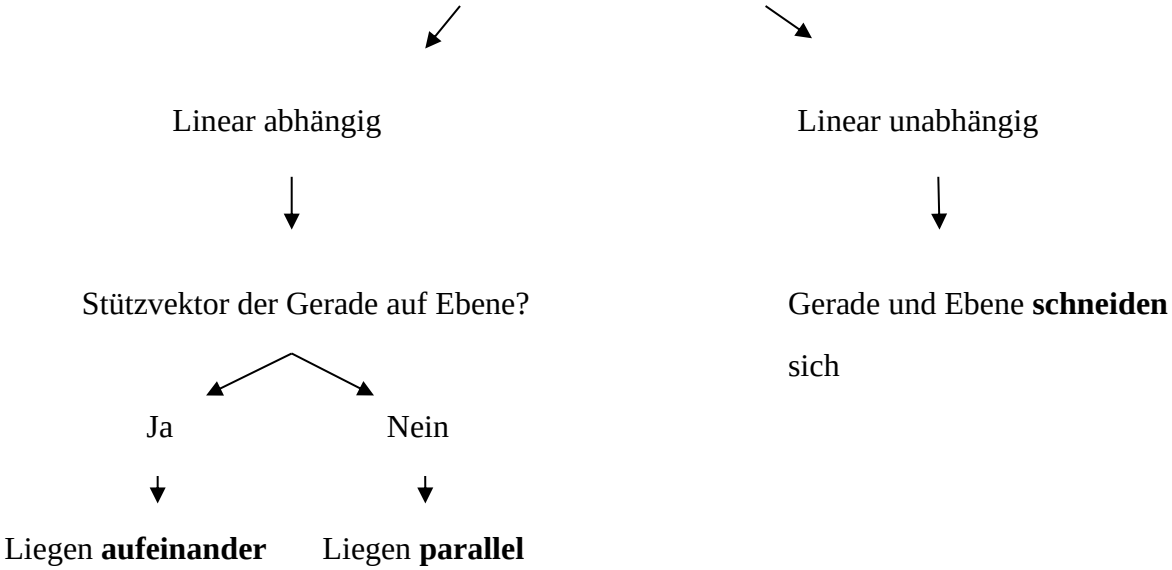
Aus III folgt:
0r + 0 s = 4 Widerspruch

=> Die drei Vektoren liegen nicht in der gleichen Ebene.

Klar, da bei den Vektoren der dritte Eintrag 0 ist, verlässt der Vektor die Ebene (Dimension) und die drei Vektoren können gar nicht abhängig sein.

Dies kann man nun nutzen, um die Lage einer Gerade mit ihrem Richtungsvektor zu einer Ebene mit beidem Richtungsvektoren zu ermitteln:

Richtungsvektoren (von Ebene und Gerade)



Beginnen wir mit einem Beispiel, bei dem die Gerade und die Ebene sich schneiden. Das bedeutet, dass der Richtungsvektor der Gerade und die beiden Richtungsvektoren der Ebene nicht in der gleichen Ebene liegen können und daher linear unabhängig sind.

Überprüfe, ob die Gerade die Ebene schneidet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

I $r \cdot 1 + s \cdot 1 = 2$
II $r \cdot 1 + s \cdot 0 = 1$ => r = 1
III $r \cdot 0 + s \cdot 1 = -1$ => s = -1

Probe: r, s in I :

$1 + (-1) = 2$

$0 = 2$ Widerspruch

=> Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig

=> Die Gerade schneidet die Ebene.

Nun ein Beispiel, bei dem Gerade und Ebene echt parallel sind. Das bedeutet: Die drei Vektoren sind linear unabhängig. Klar: Die Richtungsvektoren liegen hier nicht in einer Ebene. Aber sind natürlich linear abhängig.

Überprüfe, ob die Gerade die Ebene schneidet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Betrachtung der Richtungsvektoren:

$$r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I $-4r - 4s = 1$
II $4r + 0s = 1$ => $r = \frac{1}{4}$
III $0r - 2s = 1$ => $s = -\frac{1}{2}$

Probe in I: $-4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$
$-1 + 2 = 1$
$1 = 1$ Wahre Aussage

=> Die Gerade ist entweder parallel oder liegt in der Ebene.

2. Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I $4 - 4r - 4s = 1$

II $0 + 4r + 0s = 3$ => $4r = 3$ => $r = \frac{3}{4}$

III $0 - 0r - 2s = 2$ => $-2s = 2$ => $s = -1$

Probe in I

$4 - 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot (-1) = 1$

4 -3 + 4 = 1

5 = 1 Widerspruch

=> Der Stützvektor der Geraden liegt nicht in der Ebene.

=> Die Gerade ist echt parallel zur Ebene

Nun der letzte Fall: Die Gerade liegt in der Ebene.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Betrachtung der Richtungsvektoren:

$$r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

I 1r + 0s = 2 => r = 2

II -2r - 3s = 5

III 0r − 1s = 3 => s = - 3

Probe in II: $-2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 5$

-4 + 9 = 5

5 = 5 Wahre Aussage

=> Die Gerade ist entweder parallel oder liegt in der Ebene.

2. Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

I 2 + 1r + 0s = 3 => 2 + r = 3 => r =1

II 1 -2r - 3s = 5 => -2r – 3s = 4

III 3 +0r − 1s = 5 => 3 - s = 5 => -s = 2 => s = -2

Probe in II

$-2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 4$

-2 + 6 = 4

4 = 4 => Wahre Aussage

5 = 1 Widerspruch

=> Der Stützvektor der Geraden liegt in der Ebene.

=> Die Gerade liegt in der Ebene

14.2 Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte.

Bei diesem Verfahren, setzt man die Ebene und die Gerade gleich und bestimmt so die Anzahl der Schnittpunkte:

1. Gibt es einen Schnittpunkt, dann schneiden sich die Grade und die Ebene.
2. Gibt es unendlich viele Schnittpunkte, dann liegt die Gerade in der Ebene.
3. Gibt es keinen Schnittpunkt, dann sind Gerade und Ebene echt parallel.

Beispiel zu 1:

Gegeben ist die Ebene E und die Gerade g mit:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.Gleichsetzen $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{matrix} I \; 2 + t = 1 + 2r - 1s \\ II \; 2 - t = 1 - s \\ III \; 1 + t = 5 + r + 3s \end{matrix}$

2. Lineares Gleichungssystem lösen und t herausfinden

Dieses LGS löst man nun z.B. durch das Gaußverfahren und erhält folgende Werte:

t = $-\frac{1}{3}$ r = $-\frac{1}{3}$ s = $-\frac{4}{3}$

Das LGS ist lösbar. Das bedeutet dass es genau einen Schnittpunkt gibt.

Diesen Schnittpunkt können wir auch errechnen, indem wir t in die Gerade einsetzen.

Würde bei der Rechnung eine unwahre Aussage rauskommen (z.B.: 3 = 5), dann gäbe es keinen Schnittpunkt und die Gerade und die Ebene wären echt parallel.

Wenn eine wahre Aussage (z.B.: 4 = 4) rauskommen würde, gäbe es unendlich viele Schnittpunkte und die Gerade würde in der Ebene liegen.

Nun rechnen wir den Schnittpunkt auch aus:

3. t in Parametergleichung der Geraden einsetzen für den Durchstoßpunkt D

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1/3 \\ 2 + 1/3 \\ 1 - 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{SP} \left(1\frac{2}{3} \middle| 2\frac{1}{3} \middle| \frac{2}{3}\right)$$

Besonders einfach kann man die Lage und damit auch den Schnittpunkt bestimmen, wenn die Ebene in Koordinatenform gegeben ist:

Gegeben:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$

Bestimme die Lage von Gerade und Ebene, indem du die Anzahl der Schnittpunkte berechnest.

1. Aus der Geradengleichung x-Werte herauslesen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Für $\vec{x}$ setzen wir $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ entspricht $\begin{matrix}x_1 = 3 + 2t\\x_2 = 4 + 1t\\x_3 = 7 - 1t\end{matrix}$

2. x-Werte in Koordinatengleichung der Ebene einsetzen

$2 \cdot (3 + 2t) + 5 \cdot (4 + t) – (7 – t) = 49$

$6 + 4t + 20 + 5t – 7 + t = 49$

$19 + 10t = 49 \mid - 19$

$10t = 30$

$t = 3$

4. In Geradengleichung einsetzen

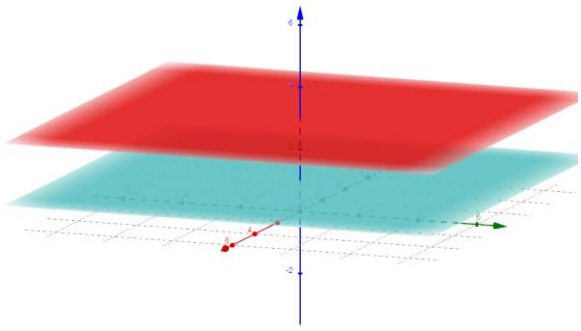
t = 3…. $\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ SP (9 | 7 | 4)

15 Lage zweier Ebenen

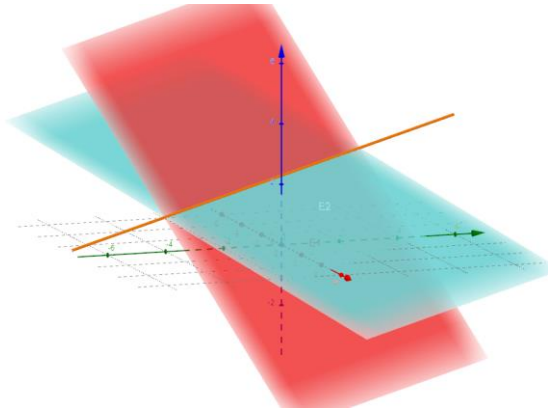
Wenn sich zwei Ebenen im dreidimensionalen Raum befinden, so gibt es **drei Möglichkeiten**, wie diese zueinander liegen können:

1. **Die Ebenen sind identisch**: Dabei liegen die beiden Ebenen „aufeinander“. Jeder Punkt der einen Ebene, liegt auch auf der anderen.

2. **Die Ebenen sind parallel**: Die Ebenen berühren sich in **keinem** Punkt



3. **Die Ebenen schneiden sich**: Es entsteht eine **Schnittgerade**. Diese enthält jene Punkte, welche die zwei Ebenen gemeinsam haben.



Schärfen wir zuerst unsere Vorstellungskraft durch folgende Aufgaben.

$E: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}$	$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = 0$	$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$
Finde ein Ebene, die zu der jeweiligen Ebene identisch ist.		
Lösung: Vielfaches von den Richtungsvektoren nehmen und einen Punkt finden, der auf der Ebenen liegt.	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und ebenso den Wert nach

Hierfür für r und s einfach Werte einsetzen. Beispiel r = 1 und s = 0. (Nicht einfach das Vielfache vom Stützvektor nehmen!) $E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$	einen Punkt finden, der auf der Ebene liegt: 1 (x - 3) +4 (y -4) + 2(z – 6) = 0 x -3 +4 y – 16 +2z - 12 = 0 x + 4y +2z – 31 = 0 x + 4y +2z = 31 Diese Gleichung erfüllt der Punkt (31 | 0 | 0). Den nehmen wir als Stützvektor $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 31 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$	dem Gleichheitszeichen multiplizieren. $12x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 24$
Finde ein Gerade, die zu der jeweiligen Geraden echt parallel ist.		
Lösung: Vielfaches vom den Richtungsvektoren nehmen und einen Punkt finden, der nicht auf der Ebenen liegt. Vorsicht. Hierfür für r und s einfach Werte einsetzen. Beispiel r = 1 und s = 0. Dann einen Punkt ausrechen und einen Wert verändern. $E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einen Punkt finden, der auf der Ebene liegt: 1 (x - 3) + 4(y -4) + 2(z – 6) = 0 … x + 4y +2z = 31 Diese Gleichung erfüllt der Punkt (1 | 7 | 0) nicht. Den nehmen wir als Stützvektor $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$	Lösung: Vielfaches vom Normalenvektor nehmen und einfach den Wert nach dem Gleichheitszeichen belassen. $12x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 5$

Einige Beispielaufgaben:

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finde eine Ebene, die zu dieser Ebene echt parallel ist.

Antwort:

Dies ist die Gleichung der Ebene, die durch den Punkt $(1,2,3)$ verläuft und in den Richtungen $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ liegt.

Um eine Ebene zu finden, die echt parallel zu dieser Ebene ist, lassen wir die Richtungsvektoren unverändert oder nehmen Vielfache davon.

Als Stützvektor müssen wir nun einen Punkt nehmen, der nicht in der Ebene liegt.

Mit großer Wahrscheinlichkeit wird es schon ausreichen, wenn wir genau einen Eintrag des Stützvektors beliebig verändern. Um sicherzugehen, dass wir wirklich einen Punkt gefunden haben, der nicht in der Ebene liegt, sollten wir aber 2 Einträge ändern.

Ändern wir den Stützvektor zu $(1,4,6)$:

$$E': \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$$

Die neue Ebene E' ist parallel zu der ursprünglichen Ebene E, da sie dieselben Richtungsvektoren hat, aber einen anderen Stützvektor.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene: $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$. Finde eine Ebene, die zu dieser Ebene echt parallel ist.

Um eine Ebene zu finden, die echt parallel zu dieser Ebene ist, ändern wir wieder zwei Einträge des Stützvektors und übernehmen den Normalenvektor bzw. ein Vielfaches des Normalenvektors.

Ändern wir die Einträge x und y des Stützvektors zu $\begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}$: Nehmen wir das 2-fache des Normalenvektors $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$:

$$2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

Die neue parallele Ebene E' lautet dann:

$$E': \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}5\\7\\4\end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 0$$

Dies ist die gesuchte echt parallele Ebene in der neuen Form.

Aufgabe 3

Nehmen wir eine andere einfache Ebene: Gegebene Ebene:

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 20$$

Um eine echt parallele Ebene zu finden, nehmen wir ein Vielfaches des Normalenvektors und ändern die Zahl nach dem Gleichheitszeichen zu einer anderen Zahl, die nicht das gleiche Vielfache ist.

Der Normalenvektor ist $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$. Nehmen wir z.B. das 3-fache dieses Vektors:

$$3\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix}$$

Ändern wir die Zahl nach dem Gleichheitszeichen zu einer anderen Zahl, die nicht das gleiche Vielfache ist, z.B. 50: Die neue parallele Ebene lautet dann:

$$12x_1 + 15x_2 + 18x_3 = 50$$

Können wir zu einer Ebene eine weitere parallele bzw. identische Ebene finden, so fällt es leicht auch eine Ebene zu finden, die mit einer vorgegebenen Ebene eine Schnittgerade bildet.

Will man die Lage zweier Ebenen über den Vergleich der Stützvektoren und einer Punktprobe machen, dann empfiehlt es sich nicht, die beiden Richtungsvektoren, sondern die Normalenvektoren der Ebenen zu vergleichen.

Aufgabe: Bestimme die Lage der beiden Ebenen, indem du die Vektoren vergleichst und evtl. eine

Punktprobe machst:

$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} \text{ und } E: \bar{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}$$

Zu den Richtungsvektoren, erhalten wir folgende orthogonale Vektoren:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-3) - (-2)\cdot(-3)\\-(1\cdot(-3) - (-2)\cdot 2)\\1\cdot(-3) - 2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\-1\\-7\end{pmatrix}$$

Analog: $\begin{pmatrix}24\\2\\14\end{pmatrix}$

Wie man leicht nachrechnet, sind die beiden Normalenvektoren kollinear zueinander. Daher sind die Ebenen entweder echt parallel oder identisch. Prüfen wir, ob der Stützvektor der einen Ebene auf der anderen Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Dies führt zu folgenden drei Gleichungen:

$$-r+4s=-1$$
$$-2\,r-6s=-2$$
$$2r-6s=2$$

Wir haben ein überbestimmtes LGS, also berechnen wir r und s aus den Gleichungen I und II und machen mit der dritten Gleichung die Probe!

$$-r+4s=-1$$
$$-2\,r-6s=-2$$

I – r + 4s = -1 => -r = -4s -1 => r = 4s + 1

I in II: -2(4s +1) – 6s = - 2

-8s – 2 – 6s = -2

- 14s = 0 => s = 0

s in I: r = 4 · 0 +1 => r = 1

Probe in III: -2 · 1 - 6 · 0 = -2

-2 = - 2 Wahre Aussage.

Da die Normelenvektoren kollinear zueinander sind und der Stützvektor der einen Ebene auf der anderen Ebene liegt, sind die Ebenen identisch.

Lagebestimmung über die Schnittpunkberechnung

Möchte man nun herausfinden, ob zwei Ebenen parallel oder identisch sind, dann kann man die Anzahl der Schnittpunkte berechnen. Erhält man bei der Rechnung eine wahre Aussage, dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte und die Ebenen sind identisch. Erhält man bei der Rechnung eine unwahre Aussage, dann

gibt es keine Schnittpunkte und die Ebenen sind echt parallel. Erhält man eine „konkrete“ Lösung, dann kann man eine Schnittgerade berechnen. Klar, dass auch die Schnittgerade unendlich viele Punkte hat.

Diesen Fall betrachten wir später genauer:

Zunächst einmal folgende Aufgabe: Bestimme die Lage der beiden Ebenen:

$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} \text{ und } E: \bar{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}$$

Als erstes ändern wir die Namen der Parameter:

$$E: \bar{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} \text{ und } E: \bar{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}$$

Dann gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}4\\-6\\-6\end{pmatrix}$$

Daraus erhält man drei Gleichungen:

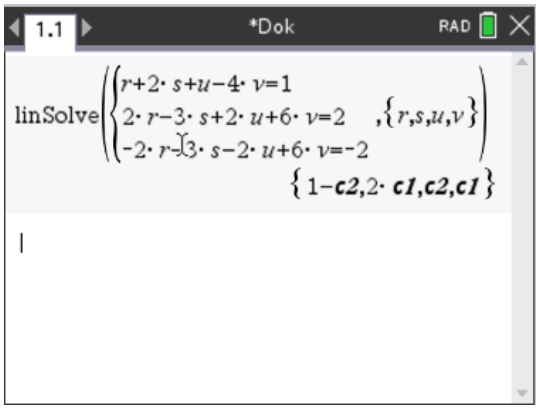
I $\quad 2 + r + 2s = 3 - u + 4v \quad \Rightarrow \quad r + 2s + u - 4v = 1$

II $3 + 2r - 3s = 5 - 2u - 6v \quad \Rightarrow \quad 2r - 3s + 2u + 6v = 2$

III $4 - 2r - 3s = 2 + 2u - 6v \quad \Rightarrow \quad -2r - 3s - 2u + 6v = -2$

Wir haben also ein unterbestimmtes LGS vier unbekannte und nur 3 Gleichungen. Nun würde man für eine Variable eine Zahl auswählen und dann die restlichen Variablen berechnen.

Wir geben die Ebene in den GTR ein:



An der Lösung sieht man, dass es unendlich viele Lösungen gibt, je nachdem, was man für c1 und c2 für eine Zahl wählt.

IL = {r,s,u,v| r,s,u,v $\in IR | r = 1 - u | s = 2v, u, v,$}

Man erkennt, dass das Rechnen mit zwei Parameterformen recht aufwändig ist. Angenehmer ist es, wenn eine Form in der Koordinatenform steht. Sollte eine Form in der Normalenform gegeben sein, bietet es sich an, diese zuerst in die Koordinatenform umzuwandeln und dann gelichzusetzen.

Aufgabe: Berechne die Lage der beiden Ebenen:

$E: \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und F: 3x +6y +4z = 36

Lösungsweg: Ersetze $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene E:

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Stelle nun drei Gleichungen auf:

x = 2 – 2s

y= 2r + 3s

z = 3 -3r – 3s

Diese Gleichungen kannst du nun in F einsetzen:

3(2 – 2s) + 6(2r + 3s) + 4(3 -3r – 3s) = 36

6 – 6s + 12 r + 18 s + 12 -12r -12 s = 36

0s + 0r + 18 = 36 | -18

0 = 18 unwahre Aussage

Daraus folgt, dass es keine Schnittpunkte gibt und die Ebenen echt parallel sind.

Aufgabe:

Untersuche die gegenseitige Lage der Ebenen E und F. Bestimme gegebenenfalls eine Gleichung der Schnittgeraden.

E: 4x + 3y + 6z = 36 F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ + r $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ + s $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung:

Wir setzen die Koordinaten der gegebenen Ebene F in die Koordinatengleichung der Ebene E ein.

$$\begin{array}{rl} & x = 3r + 3s \\ \textit{Koordinaten von } \text{F}: & y = 2r \\ & z = 3 - r - s \end{array}$$

Wir erhalten eine Gleichung mit den Parametern r und s. Diese Gleichung lösen wir einem Parameter auf, z.B. nach s.

Einsetzen in die Koordinatengleichung:

$$\begin{array}{l} 4 \cdot (3r + 3s) + 3 \cdot 2r + 6(3 - r - s) = 36 \\ 12r + 12s + 6r + 18 - 6r - 6s = 36 \\ 6s = 18 - 12r \Rightarrow s = 3 - 2r \end{array}$$

Das Ergebnis s = 3 – 2r setzen wir in die Parameterform von F ein, die dann nur noch den Parameter r enthält. Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen ergibt sich eine Geradengleichung. Es handelt sich um die Gleichung der Schnittgeraden g der Ebenen E und F.

Bestimmung der Schnittgeraden g:

$$\text{g: } \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \text{r}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + (3 - 2\text{r})\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \text{r}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} - 2r\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\0\\-3\end{pmatrix} + \text{r}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-6\\0\\+2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + \text{r}\begin{pmatrix}-3\\2\\+1\end{pmatrix}$$

$$\text{Also: g: } \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\0\\0\end{pmatrix} + \text{r}\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Weitere Übungsaufgabe . Achtung das LGS wird etwas einfacher, da sich die zweite Variable heraussubtrahiert.

Gegeben seien die Ebenen E und F:

$$E: 2x + 3y - z = 5$$

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme die Lage, indem du die Anzahl der Schnittpunkte berechnest.

Lösung

Schritt 1: Bestimmen der Koordinaten der Punkte auf der Ebene F:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2r - s \\ y &= -1 + r + s \\ z &= 2 - r + s \end{aligned}$$

Schritt 2: Einsetzen dieser Koordinaten in die Koordinatengleichung der Ebene E:

$$2(1 + 2r - s) + 3(-1 + r + s) - (2 - r + s) = 5$$

Schritt 3: Vereinfachen der Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 + 4r - 2s + 3(-1 + r + s) - (2 - r + s) &= 5 \\ 2 + 4r - 2s - 3 + 3r + 3s - 2 + r - s &= 5 \\ 4r + 3r + r - 2s + 3s - s + 2 - 3 - 2 &= 5 \\ 8r &= 8 \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Schritt 4: Parameterform der Schnittgeraden g:

Da wir $r = 1$ bereits kennen, setzen wir dies in die Parameterform der Ebene F ein und verwenden den Parameter s:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+1 \\ 2-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung der Schnittgeraden g lautet:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

16 Dreieck, Lotgerade und Spiegelung

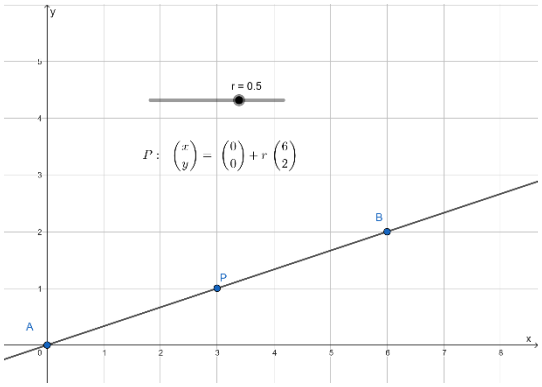
Vorüberlegung: Gegeben sind die zwei Punkte A(0|0) und B(6|2).

Die Gerade, die durch beide Punkte geht lautet:

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ferner ist ein Punkt P gegeben, der auf der Gerade liegt.

Nun ist die Frage, wann liegt der Punkt P genau auf Punkt A, wann liegt der Punkt auf Punkt B und wann dazwischen?



Aufgabe: Experimentiere mit Geogebra und untersuche den Einfluss von r auf die Lage des Punktes P:

https://www.geogebra.org/calculator/ghzzstcn

Der Parameter r bestimmt die Position des Punktes P wie folgt:

1. Wenn r = 0: Dann liegt der Punkt P bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Also genau auf A.

2. Wenn r = 1: Dann liegt der Punkt P bei $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$. Also genau auf B.

3. Wenn gilt: 0 < r < 1, dann liegt der Punkt P genau zwischen A und B.

Nun zum eigentlichen Thema Dreiecke.

Die drei Punkte A(1 | 2 | 3), B(3 | 4 | 0) und C (0 | 1 | 2) spannen ein Dreieck auf, das in folgender Ebene liegt.

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 4 - 2 \\ 0 - 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix}$$

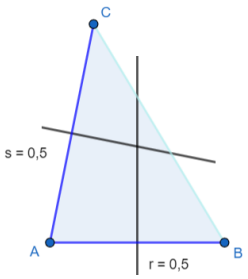
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Da diese Ebene das Dreieck A, B, C beinhaltet, bezeichnen wird diese Ebene als „Trägerebene“.

Mit der Punktprobe können wir feststellen, wann ein Punkt in einer Ebene liegt. Aber wie können wir feststellen, ob ein Punkt innerhalb des Dreiecks A, B, C liegt?

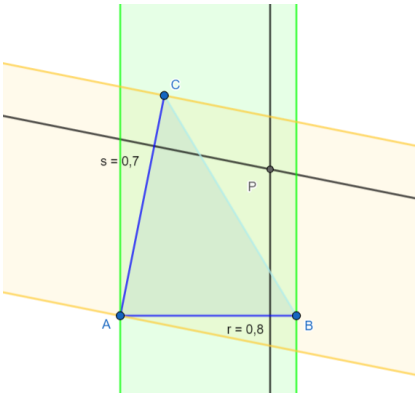
Hierfür gilt folgendes: Ist ein Dreieck durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannt, dann liegt ein Punkt genau innerhalb, wenn er folgende drei Bedingungen erfüllt:

1. $0 \leq r \leq 1$
2. $0 \leq s \leq 1$
3. $0 \leq r + s \leq 1$



Die erste Bedingung sorgt dafür, dass der Punkt innerhalb des grünen Bereichs liegt. Die zweite Bedingung sorgt dafür, dass der Punkt innerhalb des orangen Bereichs liegt. Setzt man aber für s = 0,7 und für r = 0,8 ein, dann liegt der Punkt P zwar innerhalb der beiden Bereiche, aber dennoch außerhalb des Dreiecks. Aus diesem Grund braucht man die dritte Bedingung.

$0 \leq r + s \leq 1$



Aufgabe: Überprüfe, ob der Punkt P (1| 2 | 1,75) innerhalb des Dreiecks ABC liegt.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1{,}75 \end{pmatrix}$

Die Rechnung soll hier nicht gezeigt werden, da die Punktprobe schon oft gemacht wurde. Falls dennoch Berechnungen benötigt werden, hilft ChatGPT gerne weiter.

Wir erhalten für r = 0,25 und für s = 0,5

Damit gilt:

1. $0 \leq r = 0{,}25 \leq 1$
2. $0 \leq s = 0{,}5 \leq 1$
3. $0 \leq r + s = 0{,}75 \leq 1$

=> Der Punkt liegt innerhalb des Dreiecks ABC.

Aufgabe:

Gegeben:

Die Punkte $A(2|3|4)$, $B(4|1|2)$ und $C(0|2|1)$ spannen ein Dreieck auf. Überprüfe, ob der Punkt $P(2{,}2 \mid 0{,}7 \mid 0{,}3)$ innerhalb des Dreiecks ABC liegt. Die Punktprobe kann mit Geogebra berechnet werden.

Lösung:

1. **Aufstellen der Ebene** E: Die Ebene wird durch die Punkte A, B und C aufgespannt. Berechne die Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung E lautet somit:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2. **Einsetzen des Punktes P in die Ebenengleichung**: Überprüfe, ob der Punkt $P(1.9{,}2.9, -0.1)$ innerhalb des Dreiecks ABC liegt, indem du den Punkt in die Ebenengleichung einsetzt und die Parameter r und s bestimmst:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung löst du nach r und s auf.

3. **Bestimmen der Parameter r und s**: Die Lösung der Gleichung ergibt:

$$r = 0{,}8$$

$$s = 0{,}7$$

Überprüfe nun die Bedingungen:

1. $0 \leq r = 0.8 \leq 1$

2. $0 \leq s = 0.7 \leq 1$

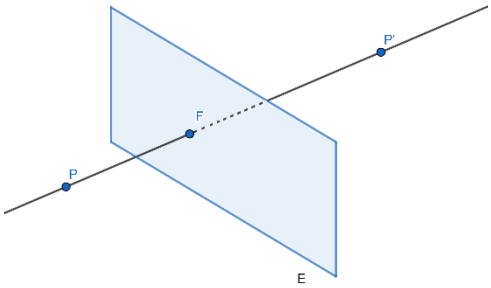
3. $0 \leq r + s = 1.5 \leq 1$

Da die dritte Bedingung $0 \leq r + s \leq 1$ nicht erfüllt ist ($r + s = 1{,}5 > 1$),

liegt der Punkt P außerhalb des Dreiecks ABC.

Lotgerade und Spiegelung

Nehmen wir die Ebene von oben und stellen uns die Frage, wie man den Punkt E (3 | 5 |7) an der Ebene spiegeln kann.



Hierzu brauchen wir eine Lotgerade, wie in dem Bild eingezeichnet. Unter einem Lot versteht man ein Gewicht, das an einer Schnur hängt. Damit kann man schauen, ob eine Mauer senkrecht steht, indem man das Lot an der Mauer herunterhängen lässt. Wenn „alles im Lot“ ist, also alles „senkrecht ist“, ist alles in Ordnung.

Unsere gesuchte Lotgerade soll zwei Eigenschaften erfüllen:

senkrecht auf E stehen

durch den Punkt P gehen.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also den Vektor, der zu den beiden Richtungsvektoren senkrecht steht.

Mit dem Kreuzprodukt berechnen wir: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diesen Normalenvektor können wir als Richtungsvektor für die Gerade nehmen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also Stützvektor nehmen wir einfach den Punkt P und erhalten somit folgende Lotgerade auf E durch Punkt P:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Lotgeraden werden bei der Abstandsberechnung sehr häufig verwendet.

Wie kann an nun mit Hilfe der Lotgeraden den Spiegelpunkt P‘ erhalten? Man macht sich klar, dass man dies einfach durch folgende Rechnung erhalten kann:

Berechne den Schnittpunkt F der Geraden g mit Ebene E

Berechne den Verbindungsvektor von P nach F

„Laufe“ nun folgenden Weg ab: Starte bei $\overline{OP}$ und laufe 2 mal $\overline{PF}$

Rechnung:

Schnittpunkt: Wandeln wir die Ebene E zunächst in Normalenform um. Den Normalenvektor haben wir ja schon.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left[\bar{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix} = 0$$

Die Gerade g teilen wir in drei Zeilen auf:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$$

I x = 3 - 5t

II y = 5 + 5t

III z = 7

Nun setzen wir g und E

$$\left[\begin{pmatrix}3 - 5t\\5 + 5t\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}3 - 5t - 1\\5 + 5t - 2\\7 - 3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}2 - 5t\\3 + 5t\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$-5 \cdot (2 - 5t) + 5 \cdot (3 + 5t) + 4 \cdot 0 = 0$$

-10 + 25t + 15 + 25t + 0 = 0

50 t + 5 = 0 | -5

50 t = - 5

t = $-\frac{5}{50}$

Nun t in die Geradengleichung einsetzen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} - \frac{5}{50} \cdot \begin{pmatrix}-5\\5\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4{,}5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

SP(3,5 | 4,5 | 7)

1. Nun den Verbindungsvektor $\overline{PF}$ ermitteln : $\overline{PF} = \overline{OF} - \overline{OP} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4{,}5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Achtung:
   Wichtig ist, dass man $\overline{PF}, also\ von\ P\ nach\ F$ und nicht umgekehrt $\overline{FP}$ ermittelt.

2. Spiegelpunkt

Nun zwei mal von P aus nach F laufen: $\overline{OP'} = \overline{OP} + 2 \cdot \overline{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

P‘ = (4 | 4 | 7)

Übungsaufgabe: Spiegelung eines Punktes an einer Ebene

Gegeben sind die Punkte $A(2\ |3|1)$, $B(4|5|2)$ und $C(1|2|0)$, die die Ebene E aufspannen. Ebenso ist der Punkt P $P(3 \mid 1 \mid 4)$ gegeben. Berechne den Spiegelpunkt P‘.

1. Ebenengleichung

Berechnen der Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Ebene E lautet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Normalenvektor der Ebene

Berechnen des Normalenvektors durch das Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 \\ -1+2 \\ -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lotgerade

Gegeben die Lotgerade durch P und senkrecht zur Ebene E:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Ebene

1. Stellen der Ebenengleichung in Normalenform um:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

2. Setzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\left[\begin{pmatrix} 3-t \\ 1+t \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1-t \\ -2+t \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-1) \cdot (1-t) + 1 \cdot (-2+t) + 0 \cdot 3 = 0$$

$$-1 + t - 2 + t = 0$$

$$2t - 3 = 0$$

$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

4. Einsetzen von t in die Geradengleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt F ist $F(1{,}5\,|2{,}5\,|4)$.

5. Berechnen des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PF}$

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Berechnen des Spiegelpunkts P'

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

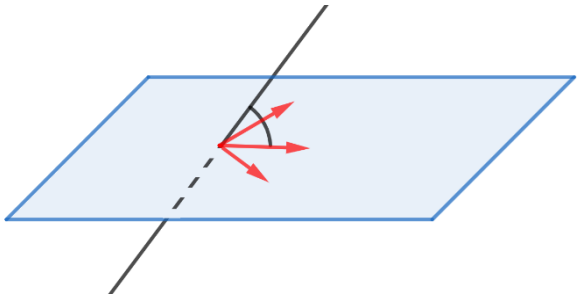
$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt P' ist $(0\,|4\,|\,4)$.

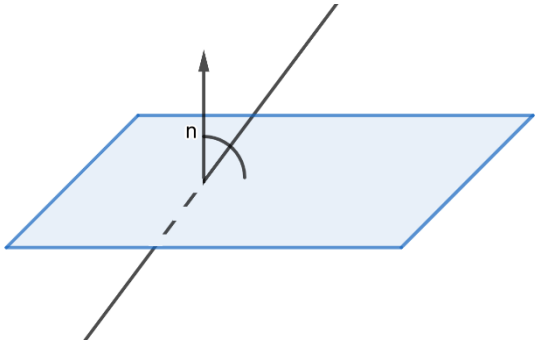
17 Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

Erinnerung: Den (kleineren) Winkel zwischen zwei Geraden haben wir mit folgender Formel berechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$



Vorüberlegung: Will man den Winkel zwischen Gerade und Ebene ausrechnen, so müsste man einen eindeutigen Vektor finden, so dass der Winkel minimal ist. Einfacher ist es daher mit dem eindeutigen Normalenvektor $\bar{n}$ zu rechnen.

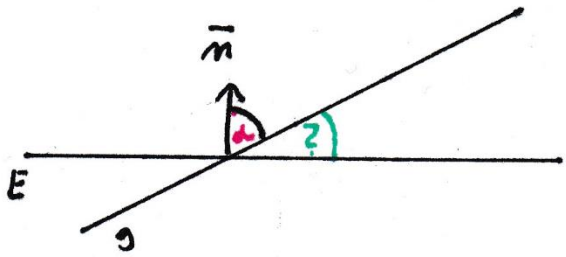


Vorgehen:

Man berechnet den Winkel α zwischen

$\bar{n}$ und dem Richtungsvektor der Graden.

Anschließend rechnet man 90° - α.



Aufgabe: Berechne den Winkel zwischen der g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\9\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, und E: $3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7$

$$\bar{n} \circ \bar{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) = 11$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\5\\-2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\bar{n}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 25 + 4} = \sqrt{38}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\cos\varphi = \frac{|n \circ v|}{|n| \cdot |v|} = \frac{11}{15{,}099} = 0{,}73 \qquad \Rightarrow \quad \varphi \approx 43{,}24$$

Dies ist allerdings nur der Winkel zwischen dem Normalenvektor und der Geraden. Wenn wir nun den Winkel zwischen Gerade und Ebene wollen, müssen wir noch folgenden Schritt anfügen:
90° - 43,11° = 46,76

Übungsaufgabe:

Berechne den Winkel zwischen **Gerade** g: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$ und der

Ebene E: $x + 3y - 2z = 5$

Rechnung

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 = 2 - 3 - 8 = -9$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 1 + 16} = \sqrt{21}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-9|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} \approx \frac{9}{17{,}146} \approx 0{,}525$$

$$\varphi \approx \arccos(0{,}525) \approx 58{,}13°$$

90° - 58,13 = 31,87°

Lösung: Der Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E beträgt ungefähr $58{,}13°$.

Hinweis: Anstatt mit cos zu rechnen, kann man laut den Funktionseigenschaften auch mit sin direkt rechnen. Nachteil ist aber, dass man hier die Vorstellung verliert und nur rein die Formel auswendig lernt.

Der Rechenweg mit Sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2 + (-2)^2}}$$

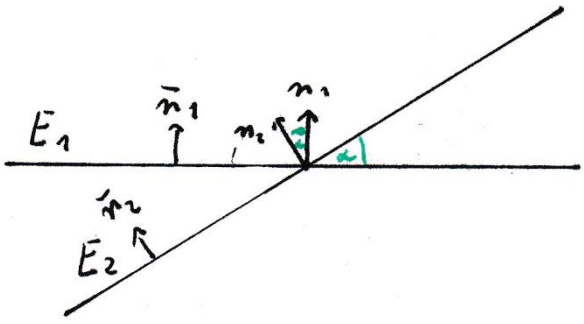
$$\sin(\alpha) = \frac{11}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{38}} = \frac{11}{\sqrt{6 \cdot 38}} = \frac{11}{\sqrt{228}} = \frac{11}{15{,}099} = 0{,}73$$

$$\alpha = sin^{-1}(0{,}73) \approx 46{,}76$$

1. **Winkel zwischen zwei Ebenen**

Vorüberlegung: Man sieht, dass der Winkel zwischen den Ebenen genau dem Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren entspricht. Klar wird

dies, wenn man vor seinem geistigen Auge den Winkel der Ebenen und sich überlegt, wie sich der Winkel zwischen den Normalenvektoren verändert



Klar: Hier kann ich jetzt wieder mit cos arbeiten.

Berechnet den Winkel zwischen den Ebenen $E_1: 3x_1 + 5x_2 = 6$ und $E_2: 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 1$

Lösung: $\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 0 \cdot (-3)|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-3)^2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|6 - 15 + 0|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{22}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|-9|}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{22}} = \frac{9}{\sqrt{748}} \approx 0{,}33$$

$$\alpha = cos^{-1}(0{,}33) \approx 70{,}73°$$

Übungsaufgabe

Berechne den Winkel zwischen der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

der Ebene $F: 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 12$.

Lösungsschritte

1. **Bestimme den Richtungsvektor der Geraden:**

   $$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Berechne den Betrag von $\vec{v}$:

   $$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

2. **Bestimme den Normalenvektor der Ebene:**

   $$\vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   Berechne den Betrag von $\vec{m}$:

   $$|\vec{m}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26}$$

3. **Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{m}$:**

   $$\vec{v} \cdot \vec{m} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 8 - 1 + 6 = 13$$

4. **Berechne den Kosinus des Winkels zwischen $\vec{v}$ und $\vec{m}$:**

   $$\cos\varphi = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{m}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{13}{3 \cdot \sqrt{26}} = \frac{13}{3\sqrt{26}} \approx 0{,}845$$

5. **Berechne den Winkel φ:**

   $$\varphi \approx \arccos(0{,}845) \approx 32{,}31°$$

   Dies ist der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Ebene und der Geraden. Um den Winkel zwischen der Geraden und der Ebene zu berechnen, ziehe diesen Wert von 90° ab:

   $$90° - 32{,}31° = 57{,}69°$$

Antwort

Der Winkel zwischen der Geraden h und der Ebene F beträgt ungefähr $57,69°$.

18 Abstandsberechnungen

Zunächst einmal definieren wir, was wir unter Abstand verstehen:

Definition „Abstand“: Der Abstand zwischen zwei Objekten soll stets die Länge der kürzesten Verbindung sein. Einfacher formuliert: Unter Abstand verstehen wir die kürzeste Entfernung.

In Kapitel 3.1. wurde gezeigt, wie man den Abstand zwischen zwei Punkten bestimmt. Hierzu hat man den Verbindungsvektor aufgestellt und die Länge dieses Vektors, den Betrag, berechnet. Diese Rechnung sollte nun für die weiteren Kapitel bekannt sein.

Um Abstände zu berechnen, gibt es das Lotfußpunktverfahren, bei dem man entweder mit einer Lotgeraden oder einer Hilfsebene den geringsten Abstand hat ermittelt.

Alternativ kann man bei manchen Abstandsproblemen auch die Abstandsformel verwenden, die auf der Hesse’schen Normalenform beruht. Beide Methoden sollen hier nun vorgestellt werden.

Wiederholung: Berechne den Abstand der Punkte:

a) A(3 | 1) und B(1 | 0)

b) A(5 | 3 |1) und B(4 | 0 | 2)

Lösung:

a) Verbindungsvektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Betrag des Verbindungsvektors: $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\ LE$

b) Verbindungsvektor $\overline{AB} = \begin{pmatrix} 5-4 \\ 3-0 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Betrag des Verbindungsvektors:

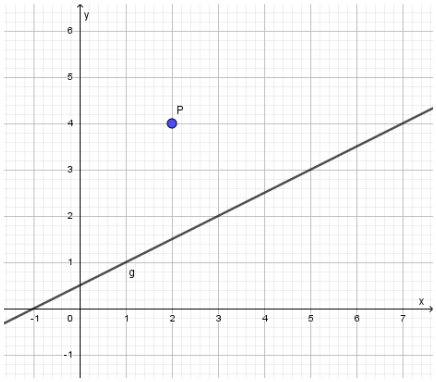
$$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}\ LE$$

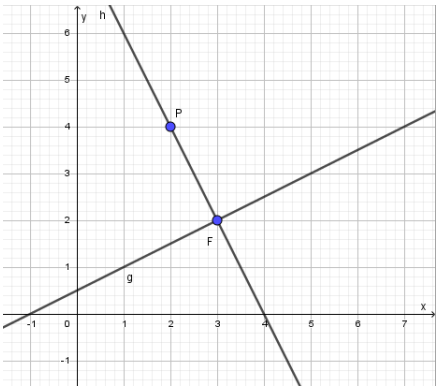
18.1 Abstand Punkt – Gerade im IR^2 und Punkt - Ebene im IR^3

18.1.1 Abstandsbestimmung Punkt-Gerade mit Lotfußpunktverfahren (Hilfsgerade)

Gegeben ist der Punkt P(2 | 4) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne den Abstand.

Zur Erinnerung: Unter Abstand verstehen wir die kürzeste Entfernung zweier Objekte.





Beim Lotfußpunktverfahren sucht man nun den Punkt F, der auf der Geraden g liegt und zu P, den geringsten Abstand besitzt. Dies ist der Lotfußpunkt. Diesen Punkt findet man mit einer Hilfsgeraden h.

Diese Gerade hat zwei Eigenschaften:

1. Sie geht durch den Punkt P
2. Sie ist zur Geraden g senkrecht (Lot).

Um diese Lotgerade zu bestimmen, nimmt man also P als Stützvektor und als Richtungsvektor einen Vektor, der zu g senkrecht ist. Also den Normalenvektor von g.

Ermittelt man dann den Schnittpunkt der Lotgeraden h und der Geraden g, so erhält man den Punkt F.

Im letzten Schritt muss man dann nur noch den Abstand von P und F ermitteln, indem wir wie in Kapitel 3 den Betrag des Verbindungsvektors berechnen.

Dies klingt vielleicht etwas umständlich, ist aber anschaulich leicht nachzuvollziehen.

Aus den Vorüberlegungen ergibt sich folgende Vorgehensweise:

Lotfußpunktverfahren

1. Normalenvektor bestimmen
2. Lotgerade aufstellen
3. Schnittpunkt der Lotgeraden mit der Geraden / Ebenen berechnen
4. Abstand Punkt / Lotfußpunkt berechnen

Berechne den Abstand von Punkt P (2 | 4) zur Geraden g: $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

1. Ein Normalenvektor $\bar{n}$ ermitteln: $\bar{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$
   Zur Erinnerung: Den senkrechten Vektor, finden wir, indem wir die Einträge des Richtungsvektors von g vertauschen und bei einem Eintrag das Vorzeichen ändern. (Alternativ, kann man auch eine Gleichung mit dem Skalarprodukt aufstellen.)

2. Lotgerade aufstellen: Dabei P als Stützvektor und $\bar{n}$ als Richtungsvektor verwenden:
   h: $\bar{x} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ (Siehe Abbildung!)

3. Lotfußpunkt berechnen, indem man die Lotgerade und Gerade g gleichsetzt:

   $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad | -\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

   $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = -r\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

   I 1 = +r + 2s |· 2
   II 3 = -2r + s

   I 2 = 2r + 4s
   II 3 = -2r + s | + 2
   ———————
   I + II 5 = 5 s => s = 1

   s in g eingesetzt: $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

   => F(3 | 2)

   (Klar: Man kann auch r ausrechnen und dieses in die andere Gerade einsetzten.)

4. Abstand Punkt P und Schnittpunkt F:

d =$|\overline{PF}| = \left|\binom{3}{2} - \binom{2}{4}\right| = \left|\binom{1}{-2}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ LE

Aufgabe:

Gegeben ist der Punkt P(2 | 4) und die Gerade g: $-1x + 2y = 1$.

Berechne den Abstand.

1. Die Koordinaten übernehmen wir $\bar{n} = \binom{-1}{2}$.

2. Lotgerade aufstellen:
   Mit dem Punkt P(2 | 4) als Stützvektor ergibt sich folgende Lotgerade:
   h: $\bar{x} = \binom{2}{4} + r\binom{-1}{2}$

3. Lotfußpunkt berechnen (h = g)

$$I\ x = 2 - r$$
$$II\ y = 4 + 2r$$

Dies in die Koordinatengleichung g: $-1x + 2y = 1$ eingesetzt:

-(2 – r) +2(4 +2r) = 1

-2 + r + 8 + 4r = 1

6 + 5r = 1

5r = - 5

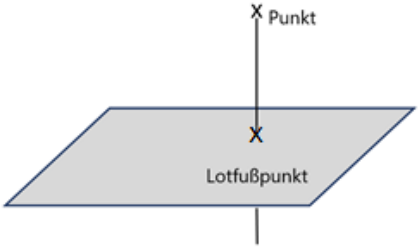
r= -1

r in h $\bar{x} = \binom{2}{4} + (-1)\binom{-1}{2} = \binom{2}{4} + \binom{1}{-2} = \binom{3}{2}$

4. Abstand Punkt P und Schnittpunkt F:

   d =$|\overline{PF}| = \left|\binom{3}{2} - \binom{2}{4}\right| = \left|\binom{1}{-2}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ LE

18.1.2. Abstandsbestimmung Punkt-Ebene mit Lotfußpunktverfahren (Hilfsgerade)



Ähnlich wie den Abstand von Punkt- Gerade im IR^2 kann man mit dem Lotfußpunktverfahren auch den Abstand von Punkt Ebene im IR^3 berechnen.

Dies macht man wieder in 4 Schritten:

1. Normalenvektor der Ebene E ermitteln (z. B. durch Kreuzprodukt der Richtungsvektoren.).
2. Hilfsgerade aufstellen mit dem Punkt als Stützvektor und dem Normalenvektor als Richtungsvektor.
3. Lotfußpunkt F als Schnittpunkt Ebene – Hilfsgerade berechnen.
4. Abstand von Punkt P und F mit dem Betrag berechnen.

Aufgabe:

Berechne den Abstand von Punkt P(4|4|5) und der Ebene E: x + y + 2z = 6.

1. **Normalenvektor aufstellen:**

Bei der Koordinatenform kann man den Normalenvektor direkt ablesen, indem man die Vorfaktoren übernimmt: 1x + 1y + 2z = 6 => $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wäre die Ebene in Parameterform, würden wir das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren ausrechnen, um $\bar{n}$ zu erhalten.

2. **Lotgerade aufstellen:**

Man stellt eine Gerade auf, die durch den Punkt geht und den Normalenvektor als Richtungsvektor hat.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Lotfußpunkt ausrechnen :**

Um den sogenannten „Lotfußpunkt“ zu berechnen, setzen wir unsere Ebene mit unserer Lotgeraden gleich:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x = 4 + r y = 4 + r z = 5 + 2r

eingesetzt in E

(4+r) + (4+r) + 2(5+2r) = 6

18 + 6r = 6

r = -2

r in g eingesetzt: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\5\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \Rightarrow F(2|2|1)$

4. Abstand vom Lotfußpunkt und dem Punkt A:

Wie schon beim Abstand Punkt-Gerade berechnen wir den Abstand von P(4|4|5) und $F(2|2|1)$

D = $|\overrightarrow{PF}| = \left|\begin{pmatrix}2-4\\2-4\\1-5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} \approx 4{,}9$ LE

Wichtiger als die Schritte auswendig zu lernen, wäre es, sich das Verfahren anschaulich klarzumachen.

Aufgabe:

Geg.: P(2|0|1) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix}$

Ges.: Abstand Punkt P zur Ebenen E.

1. Normalenvektor ermitteln: $\bar{n} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$ (Kreuzprodukt)

2. Lotgerade aufstellen: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

3. Lotfußpunkt F berechnen: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix} = -t\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}8\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Wir erlauben uns das Gleichungssystem in den Taschenrechner einzugeben und erhalten folgende Ergebnisse:

$t = \frac{1}{3}$ $r = \frac{8}{3}$ $s = -\frac{5}{3}$

t einsetzen in g: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\frac{1}{3}\\0+\frac{8}{3}\\1-\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{8}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

Damit ergibt sich der Lotfußpunkt: $F\left(\frac{7}{3} \mid \frac{8}{3} \mid -\frac{1}{3}\right)$

4. Abstand der Punkte P und F als Betrag des Vektors PF berechnen.

Der Abstand des Punktes P von der Ebene E ist somit 3.

Anmerkung: Einfacher ist es, wenn man die Ebene nicht in Parameter- sondern in Koordinatenform hat, wie folgende Aufgabe zeigen soll:

Aufgabe:

Geg.: P(2|0|1) und E: $x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 25$

Ges.: Abstand Punkt P zur Ebenen E.

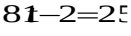
1. Normalenvektor ermitteln: $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

2. Lotgerade aufstellen $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\8\\-4\end{pmatrix}$

3. Lotfußpunkt F berechnen:

$x_1 = 2+t \qquad x_2 = 8t \qquad x_3 = 1-4t$

Einsetzen in E:



$t = \frac{1}{3}$

Einsetzen in g: $F\left(\frac{7}{3} \mid \frac{8}{3} \mid -\frac{1}{3}\right)$

4. Abstand der Punkte P und F als Betrag des Vektors PF berechnen.

LE

Der Abstand des Punktes P von der Ebene E ist somit 3.

Aufgabe

Gegeben sind die Ebene E: $3x_2 + 4x_3 = 0$

und der Punkt P (3 | -1 | 7). Berechne den Abstand.

Lösung

1. Normalenvektor von E: $3x_2 + 4x_3 = 0$

   Da der x_1-Wert nicht gegeben ist, beträgt der x_1 Eintrag des Normalenvektors 0.

   Daher gilt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Lotgerade: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Schnittpunkt g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 0r \\ -1 + 3r \\ 7 + 4r \end{pmatrix} => \begin{matrix} 3 \\ -1 + 3r \\ 7 + 4r \end{matrix}$

Diese Werte werden nun in die Koordinatendarstellung der Ebene E: $3x_2 + 4x_3 = 0$ einsetzen:

$3 \cdot 0 + 3 \cdot (-1 + 3r) + 4 \cdot (7 + 4r) = 0$

$-3 + 9r + 28 + 16r = 0$

$25r + 25 = 0$

$r = -25$

$r = -1$

Nun setzt man den Wert in die Gleichung der Lotgeraden g ein und erhält den Ortsvektor $\bar{Q}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun wird die Strecke $\overline{PQ}$ berechnet, um den Abstand dann mithilfe des Betrages $\overline{PQ}$ zu errechnen:

$$\overline{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{0^2 + 9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ LE$$

18.2 Abstandsberechnungen mit der Hesse‘schen Normalenform

18.2.1. Die Hesse’sche Normalenform mit dem Normalenvektor n_0

Von den Geraden- und Ebenendarstellungen kennen wir die Normalenform:

g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ E: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Unter der Hesse´sche Normalenform verstehen wir eine Normalenform, bei der der Normalenvektor $\bar{n}$ die Länge 1 hat. Solche Vektoren nennen wir „(Normalen-) Einheitsvektoren“ und bezeichnen diese mit $\overline{n_0}$.

Definition: Eine Ebenengleichung der Form $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \overrightarrow{n_0} = 0$ mit dem

Normaleneinheitsvektor $\overrightarrow{n_0}$ heißt Hesse`sche Normalenform.

Der Begriff stammt von dem Mathematiker Ludwig Otto Hesse.

Wie kann man nun eine Normalenform in eine Hesse´sche Normalenform umwandeln?

Grundidee: Wir berechnen die Länge des Normalenvektors. Dann teilen wir den Vektor durch seine Länge und damit wird er zu einem Einheitsvektor. Diese Einheitsvektoren haben wir schon in Kapitel 4 kennengelernt.

Gegeben: E: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = 0$ Aufgabe: Wandle in die Hesse´sche Normalenform um.

Ziel ist es also, die Länge des Normalenvektors $\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ auf die Länge 1 zu kürzen. Dazu berechnet man die aktuelle Länge und teilt anschließend jeden Eintrag durch diese Länge.

Dies klingt vielleicht etwas kompliziert. Aber nehmen wir an, wir hätten eine Strecke von unbekannter Länge, die wir auf die Länge 1 kürzen wollen:

Wir würden ausmessen, wie lange die Strecke ist. Hier vielleicht 5 Längeneinheiten. Dann würden wir die Strecke durch 5 teilen und hätten eine Strecke mit der Längeneinheit 1.

Daher berechnen wir zunächst den Betrag des Normalenvektors:

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE}$$

Der Vektor hat also die Länge 3. Nun teilen wir damit den Normalenvektor. Man sagt: „Wir normieren den Vektor."

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Eingesetzt in die Normalenform, erhalten wir die Hesse´sche Normalenform: E: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix} = 0$

.

Aufgabe: Normiere den Vektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$

5. Berechne die Länge: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = 5$
6. Normiere den Vektor:

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

Dass dieser Vektor wirklich die Länge 1 hat, kann man auch nachrechnen:

$$|\overrightarrow{n_0}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1$$

18.2.2. Abstandsberechnungen Punkt-Gerade mit der Hesse´schen Normalenform

Mit der Hesse´schen Normalenform, kann man nun Abstände berechnen:

Den Beweis, dass man mit der Hesse‘schen Normalenform Abstände berechnen kann, liefere ich beim Beispiel Abstand Punkt – Ebene nach. Vielleicht genügt vorerst folgende Vorstellung: Bei der Abstandsformel berechnet man, wie oft der Einheitsvektor zwischen Punkt und Gerade passt.

Nehmen wir folgende Aussage nun so hin:

Satz 1:

Ist g: $[\bar{x} - \bar{r}] \cdot \bar{n} = 0$ die Hesse´sche Normalenform einer Geraden g, so gilt für den Abstand d eines Punktes P mit der Geraden g:

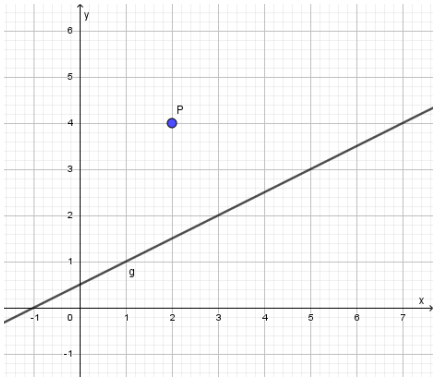
$$d = |(\bar{p} - \bar{r})| \cdot \bar{n}_0$$

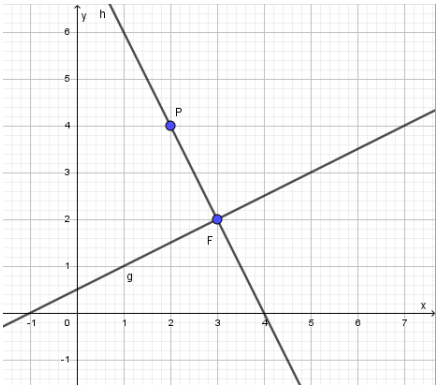
Dabei ist $\bar{p}$ der Ortsvektor zu Punk P und $\bar{r}$ der Stützvektor der Geraden. $\bar{n}_0$ ist der orthogonale Vektor zum Richtungsvektor, der auf die Länge 1 normiert wurde.

Erarbeiten wir uns diese Formel anhand des obigen Beispiels:

Gegeben ist der Punkt P(2 | 4) und die Gerade g: $\bar{x} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Berechne den Abstand!





Hier gilt:

$\bar{p} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ Ortsvektor Punkt P

$\bar{r} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ Stützvektor der Geraden

$\bar{n} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ Normalenvektor $\bar{n}$

Wie oben, ist das der orthogonale Vektor zum Richtungsvektor der Geraden. (Einträge vertauschen, eines der Vorzeichen ändern!) Hat man die Gerade schon in Normalenform, dann kann man sich diesen Schritt natürlich sparen und $\bar{n}$ direkt übernehmen. Für die Hesse'sche Normalenform müssen wir $\bar{n}$ noch normieren:

$$\left|\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}\ \text{LE}$$

Damit ist $\bar{n}_0 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$

Dies nun alles in die Formel eingesetzt, ergibt:

$$d = \left|\left(\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right| = \left|\left(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\right| = \left|1 \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + 3 \cdot \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\right| = \left|-\tfrac{1}{\sqrt{5}} + \tfrac{6}{\sqrt{5}}\right| = \left|\tfrac{5}{\sqrt{5}}\right| = \tfrac{5}{\sqrt{5}}\ \text{LE}.$$

Der aufmerksame Leser wird vielleicht bemerken, dass wir oben für den Abstand nicht $\frac{5}{\sqrt{5}}$ sondern nur $\sqrt{5}$ erhalten haben.

Um keine Zweifel an der Abstandsformel oder unseren Rechenkünsten aufkommen zu lassen, beweisen wir, dass gilt:

Behauptung: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

„Beweis“: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ □

Wir haben also den Nenner rational gemacht. Das heißt, dass im Nenner keine Wurzel mehr steht. Dies erreicht man, indem man den Bruch mit dem Nenner erweitert. Näheres siehe Klasse 9 „Rechnen mit Wurzeln.

Wir haben also gesehen, dass man mit dieser Formel den Abstand berechnen kann.

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right|$$

Etwas vereinfachen lässt sich die Formel noch. Anstatt: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ kann man auch schreiben: $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit sieht die Formel folgendermaßen aus:

$$d = \left| \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} \right|$$ Dies lässt sich angenehmer rechnen und daher formulieren wir die Abstandsformel zukünftig:

$$d = \left| \frac{(\bar{p} - \bar{r})}{|n|} \cdot \bar{n} \right|$$

Verinnerlichen wir dies mit einem Beispiel.

Hier geben wir die Gerade direkt in Normalenform an.

Berechne den Abstand des Punktes P(1| 3) zur Geraden g: $\left[(\bar{x}) - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt:

$$d = \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{|\sqrt{0^2+2^2}|} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2+2^2}} \right| = \left| \frac{0\cdot 0+1\cdot 2}{\sqrt{4}} \right| = \left| \frac{2}{2} \right| = 1 \text{ LE}$$

Hat man eine Gerade in Koordinatenform g: $n_1x_1 + n_2x_2 = b$, kann man den Abstand noch schneller berechnen:

Dann gilt für den Abstand: d = $\left|\frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}\right|$, wobei man für x den Punkt einsetzt.

Beispiel: Gegeben sei die Gerade g: -1x_1 + 2x_2 = 1. Berechne den Abstand zu Punkt P(2 | 4).

Dann gilt: d = $\left|\frac{-1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{5}}\right| = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ LE.

Aufgabe:

Gegeben sei der Punkt P(2|4) und die Gerade g: $\left[(\vec{x}) - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = 0$.

Berechne den Abstand mit der Abstandformel: $d = \left|\frac{(\vec{p} - \vec{r})}{|n|} \cdot \vec{n}\right|$

18.2.3. Abstandbestimmung Punkt-Ebene mit der Hesse´schen Normalenform

Auch den Abstand Punkt-Ebene im IR³ kann man mit der Abstandsformel berechnen. Dies wollen wir nun beweisen:

Behauptung: $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$ = d (F;R)

Beweis: $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$

= $\overline{PR} \cdot n_0$

= (PF +FR) $\cdot \vec{n}_0$

= $\overline{PF} \cdot \vec{n}_0 + \overline{FR} \cdot \vec{n}_0$

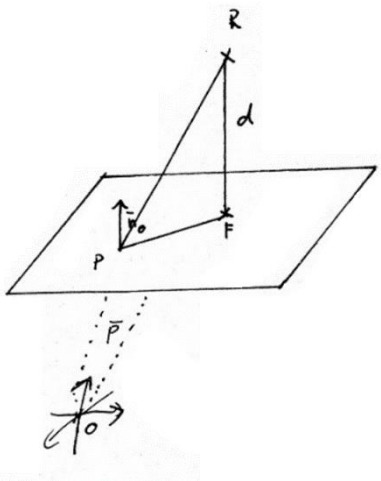
= 0, da PF orthogonal zu $\vec{n}_0$

= $\overline{FR} \cdot \vec{n}_0$

|FR|$\cdot \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0$

=|FR| $\cdot$ 1

=|FR| = $d_{(F;R)}$



So ergibt sich $(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0$ = -d

Insgesamt: d = $|(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$.

Auch hier kann man die Abstandsformel wieder folgendermaßen schreiben: $d = \left|\frac{(\vec{p} - \vec{r})}{|n|} \cdot \vec{n}\right|$

Aufgabe: Bestimme den Abstand des Punktes $R(1|6|2)$ von der Ebene E: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0$

Lösung: $|\vec{n}| = 3 \rightarrow \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$d(R;E) = \left|\frac{\left(\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{9}}\right| = \left|\frac{(-4 + (-8) + 2)}{3}\right| = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}LE$$

Satz:

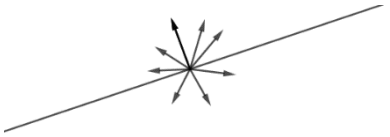
Ist $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$ eine Koordinatengleichung der Ebene E und R ein Punkt mit R($r_1|r_2|r_3$), so gilt:

$$d = \left|\frac{n_1r_1 + n_2r_2 + n_3r_3 - b}{\sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2}}\right|$$

Aufgabe: Bestimmen den Abstand des Punktes $R(1|6|2)$ von der Ebene E: $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$

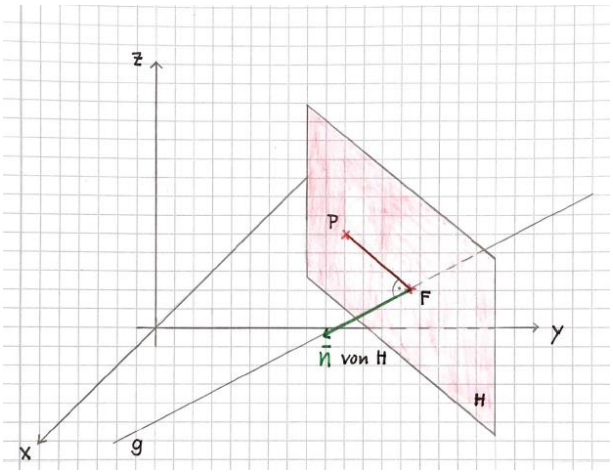
Lösung: $d(R;E) = \left|\frac{1\cdot1-2\cdot6+4\cdot2-1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{21}} \sim 0{,}87LE$

18.3. Abstand Punkt -Gerade im IR³



Problem: Im IR³ gibt es zur Geraden g unendlich viele orthogonale Vektoren, so dass man nicht einfach eine Lotgerade finden kann. Aus diesem Grunde arbeitet man hier nicht mit einer Hilfsgeraden, sondern mit einer Hilfsebene.

Gegeben ist ein Punkt R und eine Gerade g im R. Sei F der Lotfußpunkt von R auf g. Daher gilt: $d = \left|\overline{RF}\right|$.



Vorgehen:

1. Stelle eine Hilfsebene H auf, die zu g orthogonal ist und durch P geht. Die Hilfsebene H enthält den Punkt P und als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden.

2. Schneide nun die Gerade mit der Ebenen, um Punkt F zu erhalten. In der Regel ist es vorteilhaft die Ebene in Koordinatenform umzuwandeln.

3. Berechne den Abstand von Punkt P zu Punkt F.

Beispiel: Gesucht ist der Abstand des Punktes $P(-1|4|5)$ von der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

1. Hilfsebene H aufstellen:

Bilde eine Hilfsebene H, die orthogonal zur Geraden g verläuft und Punkt P beinhaltet. Dabei ist der Richtungsvektor der Geraden g der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene H.

H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0$

Wandeln wir diese durch Ausmultiplizieren in die Koordinatenform um:

H: $\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0$ => H: $\left[\begin{pmatrix}x+1\\y-4\\z-5\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} = 0$ => -1(x + 1) + 3 (y - 4) +2(z – 5) = 0 =>

-x -1 + 3y -12 + 2z -10 = 0 => - x + 3y + 2 z = 23

2. Lotfußpunkt F berechnen:

Schnittpunkt zwischen Hilfsebene H und Gerade g durch Einsetzen, berechnen:

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \begin{matrix} x = 1 - r \\ y = 2 + 3r \\ z = 2 + 2r \end{matrix}$ eingesetzt in H:

-1 · (1 – r) + 3(2 + 3r) + 2· (2 + 2r) = 23 => -1 + r + 6 + 9r + 4 + 4r = 23 => r + 9r + 4r -1 + 6 + 4 = 23 => 14r + 9 = 23

=> 14r = 14 => r = 1

Lotfußpunkt F ermitteln, indem man r in g einsetzt:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ => F(0 | 5| 4)

3. Abstand von P und F berechnen:

d = $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$

= $\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

Wie oben schon erwähnt, gibt es für eine Gerade im dreidimensionalen Raum keine Normalendarstellung:

$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ ist die Darstellung einer Ebene und keiner Geraden im IR³. Daher kann man den Fall Punkt-Gerade auch nicht im IR³ mit der Hesse Normalenform berechnen. Es bleibt nur das Lotfußpunktverfahren mit der Hilfsebene.

Übungsaufgabe: Berechne den Abstand von Punkt $P(5|\,4|\,3)$ von der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

1. Hilfsebene H aufstellen:

H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Wandeln wir diese durch Ausmultiplizieren in die Koordinatenform um:

H: $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ H: $\begin{bmatrix} x - 5 \\ y - 4 \\ z - 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

1(x -5) + 0 (y -4) -2((z-3) = 0

X – 5 – 2z +6 = 0

X – 2z +1 = 0

X – 2z = - 1

2. Lotfußpunkt F berechnen:

Schnittpunkt zwischen Hilfsebene H und Gerade g durch Einsetzen, berechnen:

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -4 + r \\ y = 6 \\ z = 6 - 2r \end{matrix}$ eingesetzt in H:

(-4+r) – 2(6 -2t) = - 1

-4 + t -12 + 4t = -1

5t – 16 = -1

5t = 15

t = 3

Lotfußpunkt F ermitteln, indem man r in g einsetzt:

$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ => F(-1 | 6| 0)

3. Abstand von P und F berechnen:

d = $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right|$

= $\sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49}$= 7 LE

18.4 Abstand zweier Geraden

Sprechen wir vom Abstand zweier Gerade, so meinen wir, dass die Gerade sich nicht schneiden und auch nicht (echt) parallel sind. In diesem Fall reden wir von windschiefen Geraden. Um diesen Fall anschaulich nachzuvollziehen, spannt man am besten zu Hause zwei Schnüre auf und überlegt sich auf diese Weise, wie die Hilfsebenen, Lotgeraden aufgestellt werden.

Den Abstand zweier Geraden im IR^3 kann man auf 3 Arten berechnen:

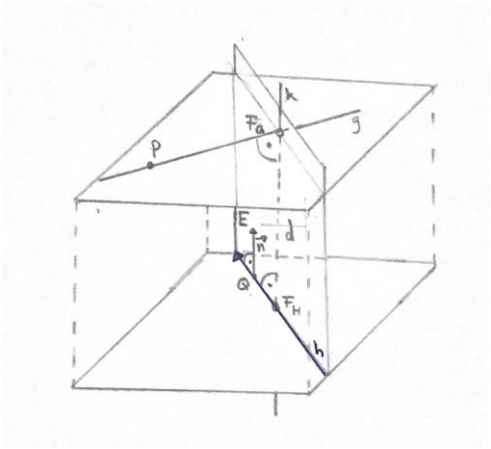
1) Abstandbestimmung mit dem Lotfußpunktverfahren mit einer Hilfsebene
2) Gleichungssystem aufstellen, das die beiden Punkte auf beiden Geraden findet, welche den

kürzesten Abstand haben. Dieses Verfahren kann sich jeder selbst aneignen.

3) Abstandsformel über die Hesse´sche Normalenform

18.5.1 Abstandbestimmung mit Hilfsebene

Satz: Unter dem Abstand zweier windschiefer Geraden g und h versteht man die kürzeste Entfernung zwischen den Punkten von g und den Punkten von h. Dieser Abstand ist gleich der Länge des **gemeinsamen Lotes** der beiden Geraden.



<u>Abstandsbestimmung mit Hilfsebene:</u>

<u>Lösungsweg:</u>

1. Normalenvektor finden, der zu beiden Geraden orthogonal ist. Genauer: Mit dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren den orthogonalen Vektor zu beiden Richtungsvektoren berechnen.

2. Hilfsebene aufstellen, welche eine Gerade (Stützvektor und Richtungsvektor) und den errechneten Normalenvektor als zweiten Richtungsvektor enthält.

3. Dann Schnittpunkt der Hilfsebene mit der anderen Geraden durch Einsetzen berechnen.

4. Nun eine Lotgerade aufstellen, die als Stützvektor den errechneten Schnittpunkt enthält und den Normalenvektor als Richtungsvektor übernimmt. Diese Lotgerade ist nun eindeutig!

5. Schnittpunkt der Lotgeraden mit der anderen Geraden bestimmen.

6. Da die beiden Schnittpunkte die Punkte sind, die auf den Geraden liegen und am geringsten voneinander entfernt sind, berechnet man nun den Abstand der beiden Punkte.

<u>Beispiel</u>

Gesucht ist der Abstand der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Normalenvektor der Richtungsvektoren aufstellen:

$$\vec{n} = \overrightarrow{m_g} \times \overrightarrow{m_h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \\ -\big(1 \cdot 0 - (-2) \cdot (-1)\big) \\ 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Hilfsebene E:

E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Diese Ebene wandeln wir in die Normalenform um:

Dazu bilden wir aus den beiden Richtungsvektoren den Normalenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Den Stützvektor übernehmen wir wieder. Damit erhalten wir folgende Form:

$$\text{E:} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

Diese wandeln wir dann in die Koordinatenform um:

$$\text{E:} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

4 (x -1) + 2(y -6) -5 (z-4) = 0

4x - 4 + 2y -12 -5z +20 = 0

4x + 2y – 5z -4 -12 + 20 = 0

4x + 2y – 5z +4 = 0

4x + 2y – 5z = - 4

4. Schnittpunkt von g und E:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ => $\begin{matrix} x = 2 + 1r \\ y = 3 + 2r \\ z = 0 - 2r \end{matrix}$

Eingesetzt in die Koordinatengleichung:

4 (2 + r) + 2(3 + 2r) – 5(0 - 2r) = - 4

8 + 4r + 6 + 4r + 10r = -4

4r + 4r + 10r + 8 + 6 = - 4

18r + 14 = -4

18r = - 18

r = - 1

Nun r in die Gerade g einsetzen:

$$\overrightarrow{OF_g} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow F_g(1|1|2)$$

4. Lotgerade k:

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

5. Schnittpunkt von k und h:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = 1, s = -2$$

$$\overrightarrow{OF_h} = \begin{pmatrix}1\\6\\4\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_h(3|2|4)$$

6. Abstand der Lotfußpunkte:

$$d = |\overrightarrow{F_gF_h}| = \left|\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE}$$

18.5.2 Abstandsbestimmung mit Hesse´scher Normalenform

Den Abstand kann man mit der Hesse´schen Normalenform in 3 Schritten errechnen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\8\\5\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\10\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}$$

1. Den gemeinsamen Normalenvektor der beiden Geraden errechnen mit Hilfe des Vektorprodukts:

$\vec{n}$ berechnen: $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6\\-(12-6)\\9-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$

2. Aus dem berechneten Normalenvektor den Einheitsvektor bilden:

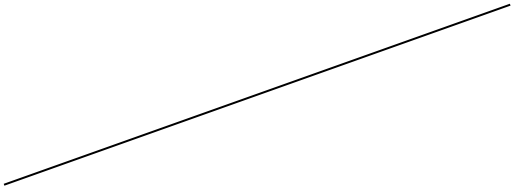
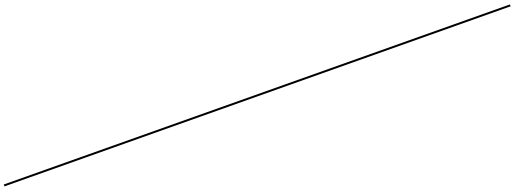
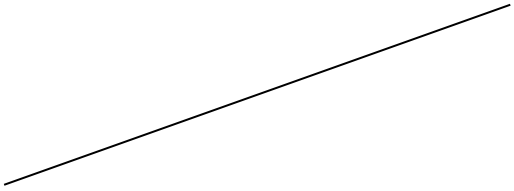
Einheitsvektor: $\vec{n}_0=\frac{1}{|\overrightarrow{n}|}\cdot\overrightarrow{n}$ $|\overrightarrow{n}|=\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}=7$ $\vec{n}_0=\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$

3. Eingesetzt in die Abstandsformel:

$$d(R;E)=\left|\frac{\left(\begin{pmatrix}8\\8\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7\\2\\10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}}\right|=\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\6\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{49}}\right|=\left|\frac{-2+36+15}{7}\right|=\frac{49}{7}=7\text{ LE}$$

Kurzfassung: Die beiden Stützvektoren subtrahieren und mit dem Kreuzprodukt der Richtungsvektoren multiplizieren. Teile dann durch den Betrag

18.6. Zusammenfassung

Abstandsberechnungen (Überblick)		
	IR^2	IR^3
Punkt zu Punkt	Betrag ausrechnen	Betrag ausrechnen
Punkt zu Gerade	Lotfußpunkverfahren mit Lotgerade oder Abstandformel	Lotfußpunkverfahren mit Hilfsebene Achtung: Abstandsformel klappt hier nicht, da Normelenvektor nicht eindeutig.
Gerade zu Gerade	Im IR^2 müssen die beiden Geraden parallel sein, wenn sie einen Abstand haben. Dann den Abstand zwischen Gerade und einem Punkt der anderen Gerade bestimmen.	Lotfußpunkverfahren mit Hilfsebene und Lotgerade oder Abstandsformel
Punkt zu Ebene		Lotfußpunkverfahren mit Lotgerade oder Abstandsformel
Gerade zu Ebene		Die Gerade zur Ebene muss parallel sein, daher einen Punkt auf der Geraden bestimmen und den Abstand des Punktes zur Ebene berechnen.
Ebene zu Ebene		Einen Punkt auf der 1.Ebene bestimmen und den Abstand des Punktes zur 2.Ebene berechnen.